# 第 218 講 回転体の体積

### 学習目標

- 回転軸に垂直な切片を選び、回転後の断面が円板か円環かを判断できる。
- 外半径と内半径を回転軸からの距離として表し、断面積を作れる。
- $x$軸回転では縦の切片、$y$軸回転では横の切片を用いて体積を求められる。
- 連続性、半径の非負性、外半径と内半径の大小、積分区間を確認できる。
- 領域が回転軸をまたぐ場合や、外半径が途中で入れ替わる場合を見分けられる。

### 回転体と回転軸

平面上の領域を、同じ平面上の直線の周りに 1 回転してできる立体を回転体という。この直線を回転軸という。
回転軸に垂直な線分を回転すると、線分の一端が軸上にある場合は円板になり、線分が軸から離れている場合は中央に穴のある円環になる。したがって、回転軸から線分の端までの距離が半径となる。

## 座標値ではなく軸からの距離を見る

$x$軸を回転軸とし、位置$x$で領域を縦に切る。切片が$0 \le y \le R(x)$であれば、回転後の断面は半径$R(x)$の円板である。切片が$r(x) \le y \le R(x)$で、$0 \le r(x) \le R(x)$なら、回転後の断面は外半径$R(x)$、内半径$r(x)$の円環である。
回転軸が$y = c$であるとき、点の$y$座標そのものを半径にしてはならない。半径は$y = c$からの距離である。例えば、軸$y = 1$と曲線$y = x^2$の間の距離は、$x^2 \le 1$なら$1 - x^2$である。

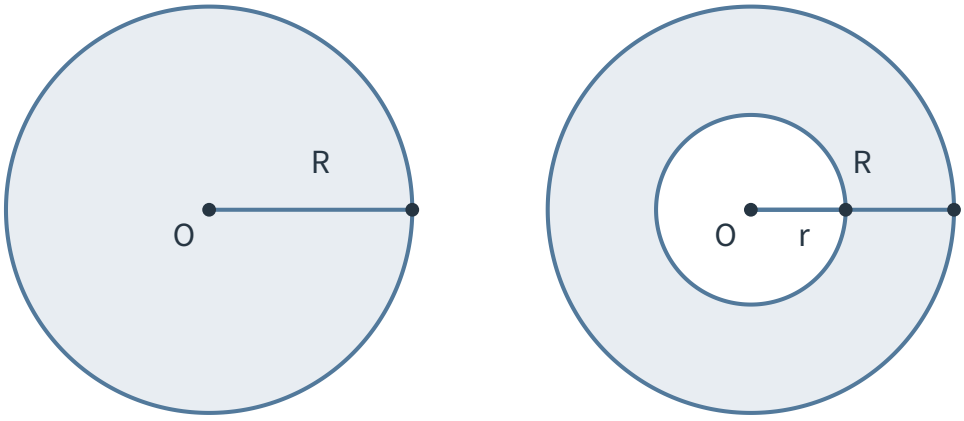


**図 1**　左は半径$R$の円板、右は外半径$R$・内半径$r$の円環である

### 円板法と円環法

関数$f$が区間$[a,b]$で連続かつ非負であるとする。領域$0 \le y \le f(x)$を$x$軸の周りに回転すると、位置$x$での断面積は$A(x)=\pi f(x)^2$である。したがって、体積は次式で与えられる：

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

関数$R,r$が区間$[a,b]$で連続で、すべての$x\in[a,b]$について$0\le r(x)\le R(x)$を満たすとする。外半径$R(x)$、内半径$r(x)$の円環の面積は、大円の面積から小円の面積を引いた$A(x)=\pi\{R(x)^2-r(x)^2\}$である。したがって、体積は次式で与えられる：

$$V=\pi\int_a^b \{R(x)^2-r(x)^2\}\,dx$$

ここに示した連続性、非負性、半径の大小は、これらの公式を安全に使うための十分条件である。

### 回転体の体積を求める手順

1. 回転軸を確認し、回転軸に垂直な向きに領域を切る。
2. 切片が動く区間を決める。
3. 回転軸から切片の外側までを外半径$R$、内側までを内半径$r$とする。
4. 円板なら$A=\pi R^2$、円環なら$A=\pi(R^2-r^2)$とする。
5. 半径の連続性と$0\le r\le R$を確かめ、断面積を区間全体で積分する。

$y$軸回転を円板法・円環法で扱うときは、$y$軸に垂直な横の切片を使う。半径を$y$の関数で表し、$dy$で積分する。

### 軸をまたぐ場合と内外が変わる場合

円環の面積は$\pi(R-r)^2$ではなく、$\pi(R^2-r^2)$である。$R-r$は円環の厚さであり、円板の半径ではない。

切片が回転軸をまたぐと、回転後の断面では中央の穴が消える。このとき、切片の上下端をそのまま外半径と内半径にして二乗差を作ってはならない。軸から最も遠い端までの距離を半径とする円板として考える。

2 本の境界が交わり、回転軸から遠い側が途中で入れ替わる場合は、その交点で積分区間を分ける。

©ミライコーチング

# 例題

### 例題 1：$x$軸回転と円板

曲線$y = x + 1$、$x$軸、直線$x = 0$、$x = 1$で囲まれた領域を$x$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

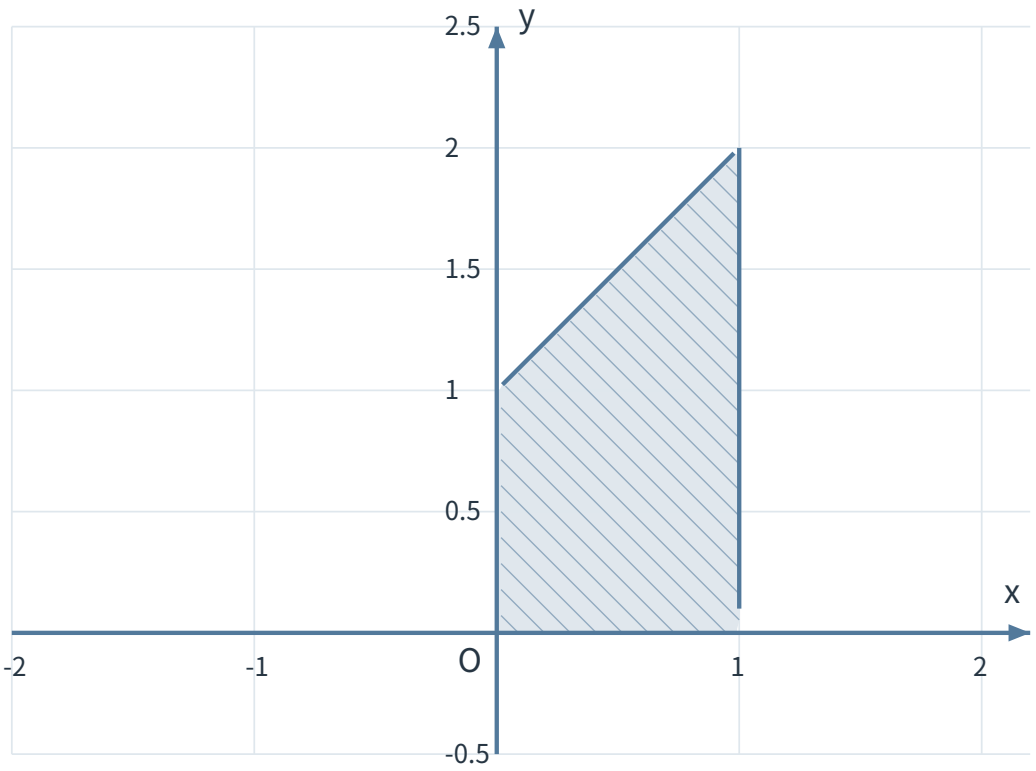


**図 2**　$0 \leq x \leq 1$で$x$軸と直線$y = x + 1$に挟まれた領域を$x$軸の周りに回転する

### 例題 1 の解答・解説

回転軸である$x$軸に垂直な縦の切片を考える。$0 \leq x \leq 1$において、切片は$0 \leq y \leq x + 1$であり、回転後の断面は半径$x + 1$の円板である。したがって、断面積は次式となる：

$$A(x) = \pi(x + 1)^2$$

$x+1$は区間$[0,1]$で連続かつ正である。体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x+1)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(x^2 + 2x + 1\right) dx \\ &= \pi \left[ \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

したがって、体積は$\frac{7\pi}{3}$である。半径 1 と 2、高さ 1 の円錐台の体積とも一致する。

**例題 2：$x$軸回転と円環**

直線$y=2$、$y=x$、$x=0$、$x=2$で囲まれた領域を$x$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

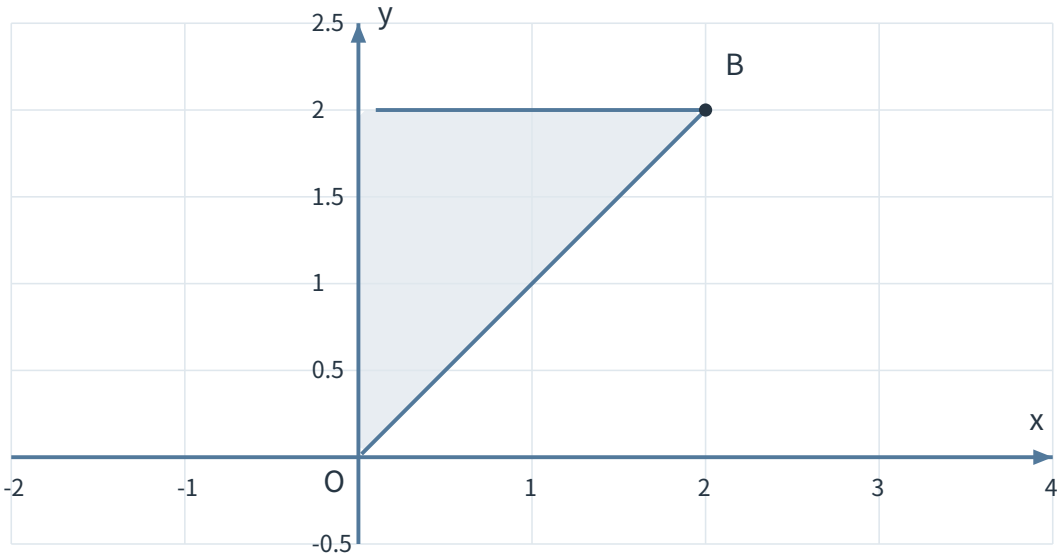


**図 3**　$0 \le x \le 2$で直線$y=x$と$y=2$に挟まれた領域を$x$軸の周りに回転する

## 例題 2 の解答・解説

位置$x$での切片は$x \le y \le 2$である。$0 \le x \le 2$なので、回転軸から遠い上端までの距離 2 が外半径、近い下端までの距離$x$が内半径である。断面積は次式となる：

$$A(x) = \pi\left(2^2 - x^2\right) = \pi\left(4 - x^2\right)$$

外半径 2 と内半径$x$は連続であり、区間全体で$0 \le x \le 2$が成り立つ。体積は次のように計算できる。

$$V = \pi \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \frac{16\pi}{3}$$

したがって、体積は$\frac{16\pi}{3}$である。$x = 2$では外半径と内半径が等しくなり、円環が面積 0 へ退化するが、積分の端点として問題はない。

### 例題 3：$y$軸回転と水平な切片

放物線$y = x^2$と直線$y = 2x$で囲まれた領域を$y$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を、円板・円環法を用いて求めよ。

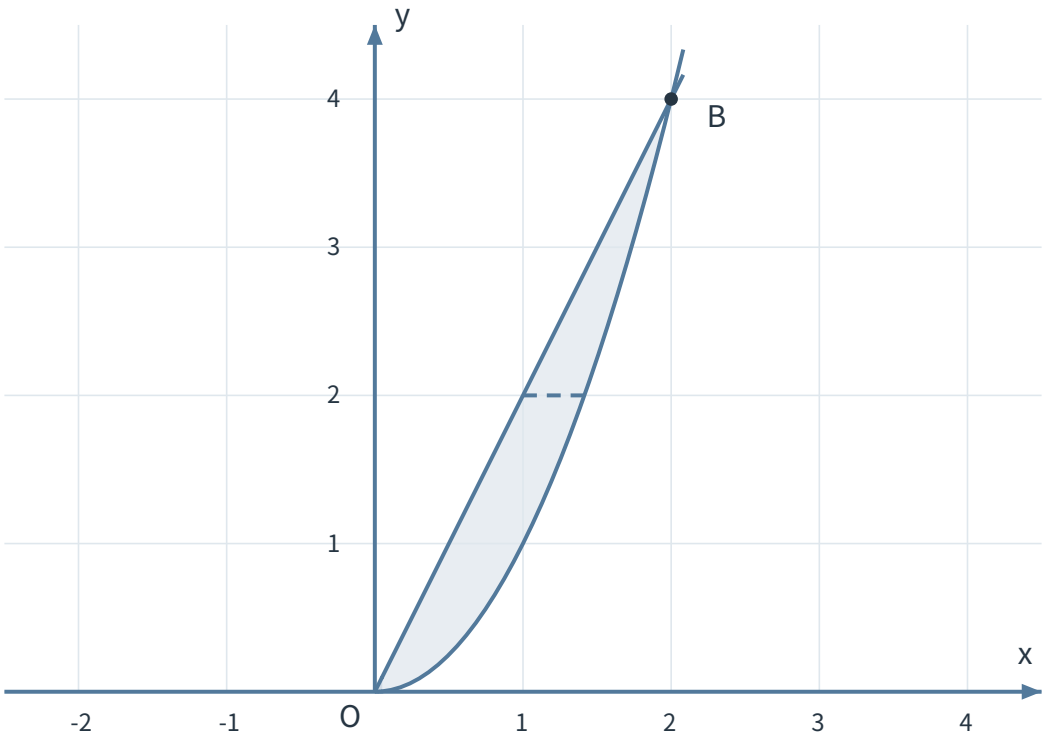


**図 4**　放物線$y = x^2$と直線$y = 2x$の間を水平に切る。破線は$y = 2$での切片である

### 例題 3 の解答・解説

$y$軸に垂直な横の切片を使うため、境界を$x$について表す。第 1 象限では、$y = x^2$から$x = \sqrt{y}$、$y = 2x$から$x = \frac{y}{2}$を得る。

2 曲線の交点は$(0,0)$と$(2,4)$であるから、$y$の範囲は$0 \le y \le 4$である。この区間では$\frac{y}{2} \le \sqrt{y}$であるため、外半径は$\sqrt{y}$、内半径は$\frac{y}{2}$となる。断面積は次式で表される：

$$A(y) = \pi\left\{(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \pi\left(y - \frac{y^2}{4}\right)$$

2 つの半径は区間$[0,4]$で連続かつ非負であり、外半径と内半径の順序も変わらない。体積は次のように計算できる。

$$V = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$

したがって、体積は$\frac{8\pi}{3}$である。

## 演習問題

**演習 1：基本の円板**

曲線$y = 2x$、$x$軸、直線$x = 1$で囲まれた領域を$x$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

**演習 2：定半径の円板**

長方形$0 \le x \le 2$、$0 \le y \le 2$を$x$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

**演習 3：定半径の円環**

長方形$0 \le x \le 2$、$1 \le y \le 3$を$x$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

**演習 4：$y$軸回転**

三角形$0 \le y \le 2$、$0 \le x \le 2 - y$を$y$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を、円板・円環法を用いて求めよ。

**演習 5：平行移動した回転軸**

曲線$y = x^2$と直線$y = 1$で囲まれた領域を、直線$y = 1$の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

©ミライコーチング

### 演習 6：同じ領域を$x$軸の周りに回す

曲線$y = x^2$と直線$y = 1$で囲まれた領域を、$x$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

### 演習 7：外半径の入れ替わり

$0 \leq x \leq 2$において、直線$y = 1$と$y = x$に挟まれた領域を$x$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

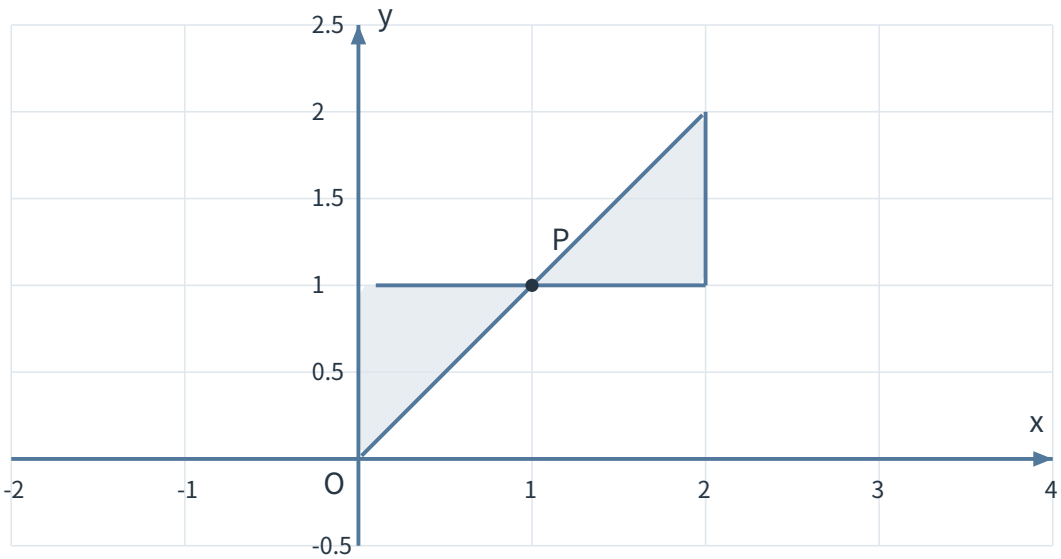


**図 5**　直線$y = 1$と$y = x$は$P(1, 1)$で交わり、その前後で外半径と内半径が入れ替わる

### 演習 8：円環法の十分条件と軸をまたぐ領域

(1) $f, g$は区間$[a,b]$で連続で、すべての$x \in [a,b]$について$0 \le g(x) \le f(x)$を満たすとする。領域

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

を$x$軸の周りに 1 回転してできる立体の体積$V$を表せ。
(2) 領域$0 \le x \le 1$、$-x \le y \le x$を$x$軸の周りに 1 回転する。断面積を$\pi\{x^2 - (-x)^2\}$としてはいけない理由を説明し、正しい体積を求めよ。

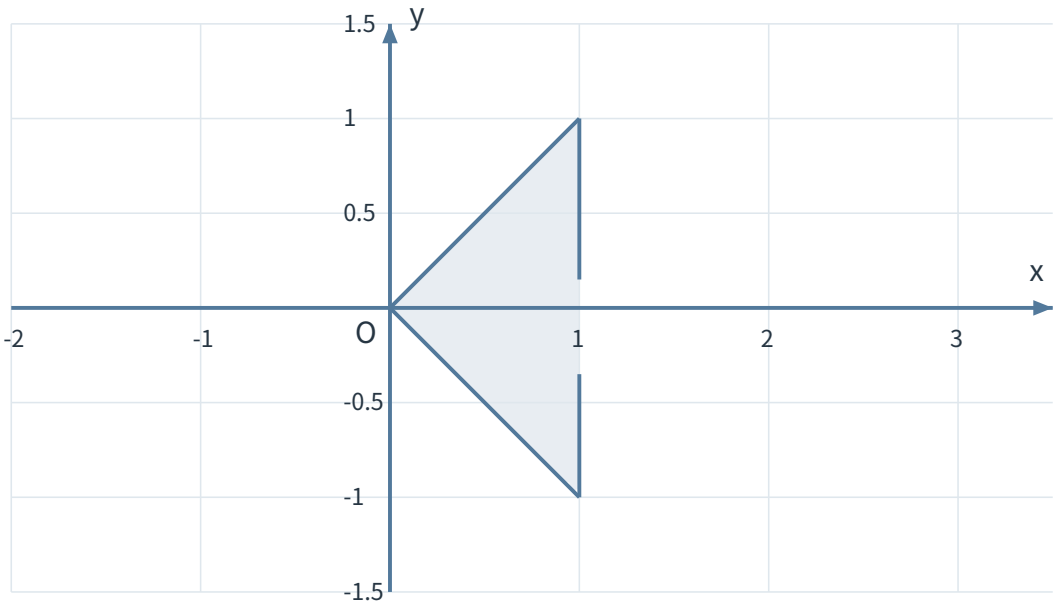


**図 6**　$0 \le x \le 1$で$-x \le y \le x$の領域は$x$軸をまたぐ

## 演習問題の解答・解説

### 演習 1 の解答・解説

$0 \le x \le 1$で、回転後の断面は半径$2x$の円板である。$2x$はこの区間で連続かつ非負である。体積は次のように計算できる。

$$V = \pi \int_0^1 (2x)^2 \, dx$$

$$= 4\pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

したがって、体積は$\frac{4\pi}{3}$である。これは底面の半径 2、高さ 1 の円錐の体積とも一致する。

### 演習 2 の解答・解説

位置$x$によらず、回転後の断面は半径 2 の円板である。断面積は$4\pi$で一定なので、体積は次のようになる。

$$V = \pi \int_0^2 4\,dx = 8\pi$$

したがって、体積は$8\pi$である。これは半径 2、高さ 2 の円柱の体積$\pi \cdot 2^2 \cdot 2$と一致する。

### 演習 3 の解答・解説

長方形は$x$軸から離れている。回転後の断面は、外半径 3、内半径 1 の円環であり、断面積は$\pi(3^2 - 1^2) = 8\pi$で一定である。よって、体積は次のようになる。

$$V = \pi \int_0^2 (9 - 1)\,dx = 16\pi$$

したがって、体積は$16\pi$である。円環の厚さは 2 であるが、その平方に$\pi$を掛けた$4\pi$は断面積ではない。

### 演習 4 の解答・解説

$y$軸に垂直な横の切片を使う。$0 \le y \le 2$において切片は$0 \le x \le 2 - y$であり、回転後の断面は半径$2 - y$の円板である。$2 - y$は区間全体で連続かつ非負である。体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (2 - y)^2\,dy \\ &= \pi \left[ -\frac{(2 - y)^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

したがって、体積は$\frac{8\pi}{3}$である。

## 演習 5 の解答・解説

2 曲線の交点は$x = -1, 1$である。回転軸は$y = 1$であり、領域の上端は軸上にある。軸から放物線$y = x^2$までの距離は$1 - x^2$なので、回転後の断面は半径$1 - x^2$の円板である。
$-1 \leq x \leq 1$では$1 - x^2 \geq 0$であり、この半径は連続である。被積分関数は偶関数なので、体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx \\ &= 2\pi \left[ x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

したがって、体積は$\frac{16\pi}{15}$である。

## 演習 6 の解答・解説

領域は演習 5 と同じであるが、回転軸は$x$軸である。外半径は 1、内半径は$x^2$なので、回転後の断面は円環となる。ただし、$x = 0$では内半径が 0 となり、半径 1 の円板になる。区間$[-1, 1]$で$0 \leq x^2 \leq 1$が成り立つ。体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^4\right) dx \\ &= 2\pi \left[ x - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

したがって、体積は$\frac{8\pi}{5}$である。同じ平面領域でも、回転軸が変われば軸からの距離が変わるため、体積も変わる。

### 演習 7 の解答・解説

2 直線は$x=1$で交わる。$0 \le x \le 1$では、$y=1$の方が$x$軸から遠いので、外半径は 1、内半径は$x$である。$1 \le x \le 2$では順序が入れ替わり、外半径は$x$、内半径は 1 である。したがって、交点$x=1$で積分を分ける。

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx + \pi \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) dx \\
&= \pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \pi \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \\
&= \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

したがって、体積は$2\pi$である。二乗差の符号が負になる区間をそのまま積分するのではなく、各区間で外半径と内半径を確定する必要がある。

### 演習 8 の解答・解説

(1) 条件$0 \le g(x) \le f(x)$より、位置$x$での外半径は$f(x)$、内半径は$g(x)$である。したがって、断面積は次式で表される：

$$
A(x) = \pi \left\{ f(x)^2 - g(x)^2 \right\}
$$

$f, g$は区間$[a, b]$で連続であり、半径の非負性と大小関係も区間全体で保たれる。よって、体積は次式となる：

$$
V = \pi \int_a^b \left\{ f(x)^2 - g(x)^2 \right\} dx
$$

(2) 位置$x$での縦の切片は$-x \le y \le x$であり、$x$軸をまたいでいる。この切片を回転すると、上端と下端はどちらも半径$x$の同じ円周を描き、断面は中央に穴のない半径$x$の円板となる。
$\pi\{x^2 - (-x)^2\} = 0$は、上下端を外半径と内半径に誤って割り当てた式である。正しい体積は次のように計算できる。

$$
V = \pi \int_0^1 x^2 \, dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}
$$

したがって、正しい体積は$\frac{\pi}{3}$である。円環法の十分条件$0 \le g \le f$のうち、$g \ge 0$が崩れるときは、回転後の断面の重なりを調べ直す必要がある。