第 220 講 ベクトルとは何か

学習目標

- ベクトルを、向きと大きさをもつ量として説明できる。
- 有向線分の始点と終点を読み取り、ベクトルの記号と大きさの記号を書き分けられる。
- 2 つの零ベクトルでないベクトルが等しいかどうかを、向きと大きさの両方から判断できる。
- ベクトルを向きと大きさを変えずに平行移動しても同じベクトルを表すことと、零ベクトルの特徴を説明できる。

1. 向きと大きさをもつ量

数だけでは表せない量

長さ、面積、温度のように、大きさだけで表される量がある。一方、物体の移動や風のように、「どちら向きに」「どれくらい」という 2 つの情報をもつ量もある。
例えば「東へ 3 m の移動」と「西へ 3 m の移動」は、大きさはいずれも 3 m であるが、向きが反対なので同じ移動ではない。このように、**向きと大きさをもつ量**をベクトルという。ベクトルは矢印で表すと分かりやすい。

ベクトルと有向線分

線分に向きを与えたものを有向線分という。有向線分の矢印の出発点を**始点**、矢印の先を**終点**という。
点 A を始点、点 B を終点とする有向線分が表すベクトルを、$\overrightarrow{AB}$ と書く。文字の順序は、始点、終点の順である。

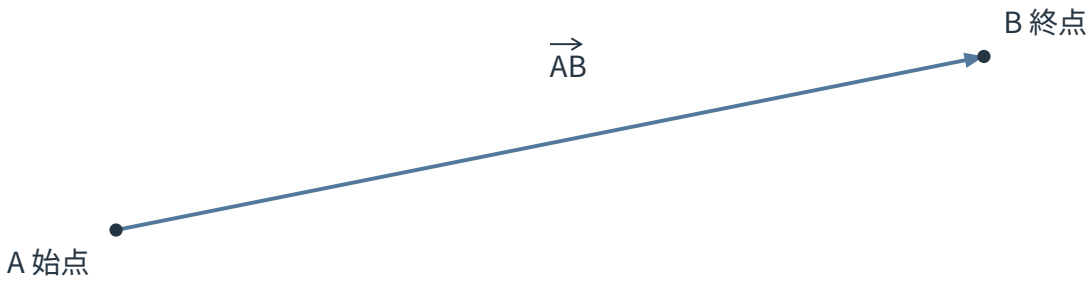


図 1　始点 A から終点 B へ向かう有向線分

記号の順序

$\overrightarrow{AB}$ は A から B へ向かうベクトルである。$\overrightarrow{BA}$ は B から A へ向かうため、$\overrightarrow{AB}$ とは向きが反対である。始点と終点を逆に読まないことが重要である。

©ミライコーチング

2. ベクトルの向きと大きさ

矢印が表す 2 つの情報

矢印の向いている方向がベクトルの**向き**であり、矢印の長さがベクトルの**大きさ**である。ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさは、線分 AB の長さに等しく、$|\overrightarrow{AB}|$ と書く。
ベクトルそのものを表す $\overrightarrow{AB}$ と、その大きさを表す $|\overrightarrow{AB}|$ は異なる。前者には向きの情報があり、後者は 0 以上の数である。

大きさが同じだけでは等しくない

2 本の矢印の長さが同じでも、向きが異なれば同じベクトルではない。反対に、向きが同じでも長さが異なれば同じベクトルではない。ベクトルを比べるときは、向きと大きさを必ず両方確認する。

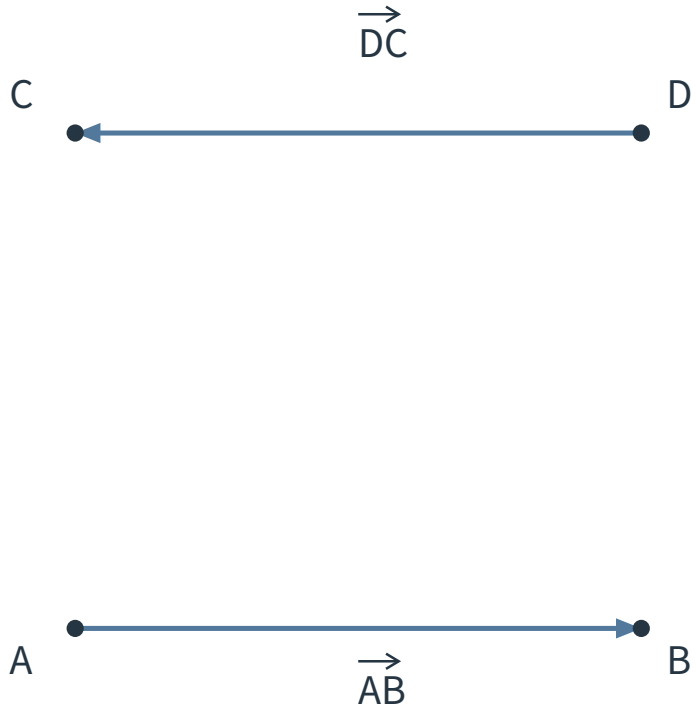


図 2　大きさが同じでも向きが異なる 2 つのベクトル

3. ベクトルが等しいとは

ベクトルの相等

2 つの零ベクトルでないベクトルは、**向きが同じで、大きさも等しい**ときに等しいという。

ベクトルを表す矢印は、向きと長さを変えずに平行移動してよい。したがって、矢印の置かれた場所が異なっていても、向きと大きさが同じなら同じベクトルを表す。

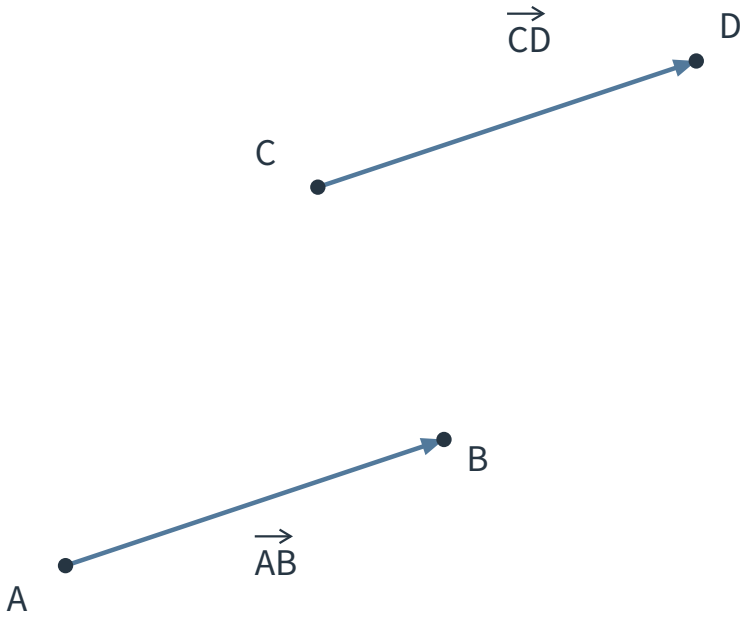


図 3　位置が異なっても向きと大きさが同じベクトル

この図では、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は向きが同じで、大きさも等しい。よって、$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ である。

位置ではなく向きと大きさを見る

ベクトルの矢印を平行移動しても、そのベクトルは変わらない。図で 2 つのベクトルを比較するときは、始点どうしが同じ場所にあるかではなく、矢印の向きと長さを見る。

4. 零ベクトル

零ベクトル

始点と終点が一致するベクトルを零ベクトルといい、$\vec{0}$ と書く。例えば、点 A から点 A へのベクトル $\overrightarrow{AA}$ は零ベクトルである。

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}, \qquad |\,\vec{0}\,| = 0$$

零ベクトルの大きさは 0 である。始点と終点が一致して矢印の向きを決められないため、零ベクトルの向きは考えない。始点をどの点に取っても、始点と終点が一致するベクトルはすべて同じ零ベクトル $\vec{0}$ である。

零ベクトルを普通の矢印として扱わない

零ベクトルは「とても短い矢印」ではない。大きさが正のベクトルには向きがあるが、零ベクトルは大きさが 0 であり、向きを定めない特別なベクトルである。

5. 例題

例題 1：有向線分の読み取り

点 P を始点、点 Q を終点とする有向線分が表すベクトルと、その大きさを表す記号をそれぞれ書け。

例題 1 の解答・解説

ベクトルは始点、終点の順に文字を書くため、$\overrightarrow{PQ}$ である。その大きさは絶対値の記号を用いて $|\overrightarrow{PQ}|$ と書く。

例題 2：等しいベクトルの判定

ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同じ向きであり、$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ である。2 つのベクトルの関係を答え、理由を説明せよ。

例題 2 の解答・解説

向きが同じで、大きさも等しいので、$\vec{a} = \vec{b}$ である。矢印の位置についての情報は必要ない。位置が異なっていても、向きと大きさが同じなら等しいベクトルだからである。

例題 3：零ベクトル

$\overrightarrow{RR}$ の名称、大きさ、向きについて答えよ。

例題 3 の解答・解説

$\overrightarrow{RR}$ は始点と終点が一致するので零ベクトルである。大きさは 0 であり、向きは考えない。

6. 演習問題

演習 1：始点と終点

ベクトル $\overrightarrow{XY}$ の始点と終点をそれぞれ答えよ。また、これと向きが反対のベクトルを、点 X、Y を用いて表せ。

演習 2：記号の区別

次のうち、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさを表すものを 1 つ選べ。
- (ア) $\overrightarrow{AB}$
- (イ) $|\overrightarrow{AB}|$
- (ウ) $\overrightarrow{BA}$
- (エ) $|\overrightarrow{BA}| = \overrightarrow{AB}$

演習 3：相等の条件

ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさは等しいが、向きは異なる。このとき $\vec{a} = \vec{b}$ といえるか。理由とともに答えよ。

演習 4：平行移動とベクトル

有向線分 AB を、向きと長さを変えずに平行移動したところ、有向線分 CD に重なった。$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の関係を式で表し、その理由を説明せよ。

演習 5：等しくならない場合

次の 3 つの場合のうち、$\vec{a} = \vec{b}$ といえるものをすべて選べ。
- (ア) 向きは同じであるが、$\vec{a}$ の大きさは $\vec{b}$ の大きさより大きい。
- (イ) 大きさは等しいが、向きは反対である。
- (ウ) 置かれた位置は異なるが、向きが同じで大きさも等しい。

演習 6：零ベクトルの説明

点 S について、$\overrightarrow{SS}$ を $\vec{0}$ を用いた式で表せ。また、零ベクトルについて「大きさ」と「向き」の語を用いて説明せよ。

7. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$\overrightarrow{XY}$ の始点は X、終点は Y である。向きを反対にすると始点と終点が入れ替わるので、求めるベクトルは $\overrightarrow{YX}$ である。

演習 2 の解答・解説

正答は (イ) である。
- (ア) は向きと大きさをもつベクトルそのものを表す。
- (イ) はベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさを表す。
- (ウ) は B から A へ向かう、向きが反対のベクトルである。
- (エ) の左辺は数であるが、右辺はベクトルであり、異なる種類の量を等号で結んでいるため不適切である。

演習 3 の解答・解説

$\vec{a} = \vec{b}$ とはいえない。ベクトルが等しいためには、向きが同じであり、さらに大きさも等しいことが必要である。今回は大きさだけが等しく、向きが異なるためである。

演習 4 の解答・解説

関係は $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ である。平行移動によって矢印の向きと長さ、すなわちベクトルの向きと大きさが変わっていないため、2 つは等しいベクトルである。

演習 5 の解答・解説

正答は (ウ) だけである。
- (ア) は向きが同じでも大きさが異なるため、等しくない。
- (イ) は大きさが等しくても向きが異なるため、等しくない。
- (ウ) は置かれた位置に関係なく、向きと大きさがともに同じであるため、等しい。

演習 6 の解答・解説

式では $\overrightarrow{SS} = \vec{0}$ と表す。零ベクトルの大きさは 0 であり、向きは考えない。

©ミライコーチング