

第 110 講 2 倍角の公式

学習目標

この講では、加法定理から 2 倍角の公式を導き、与えられた三角関数の値に応じて使う公式を選ぶようになることを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 加法定理で 2 つの角を同じ角にする考え方を説明できる。
- ・ $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ 、 $\tan 2\alpha$ の公式を使える。
- ・ $\sin \alpha$ だけ、または $\cos \alpha$ だけが与えられた場合に、計算しやすい形の公式を選ぶ。
- ・ 符号や定義条件を確認しながら倍角の値を求められる。

2 倍角の公式が生まれる理由

2 倍角の公式は、特別な公式として突然覚えるものではない。加法定理で 2 つの角を同じ角にする
と自然に現れる。

加法定理では、2 つの角の和を扱う。ここで 2 つの角をともに α とすると、角の和は $\alpha + \alpha = 2\alpha$ になる。

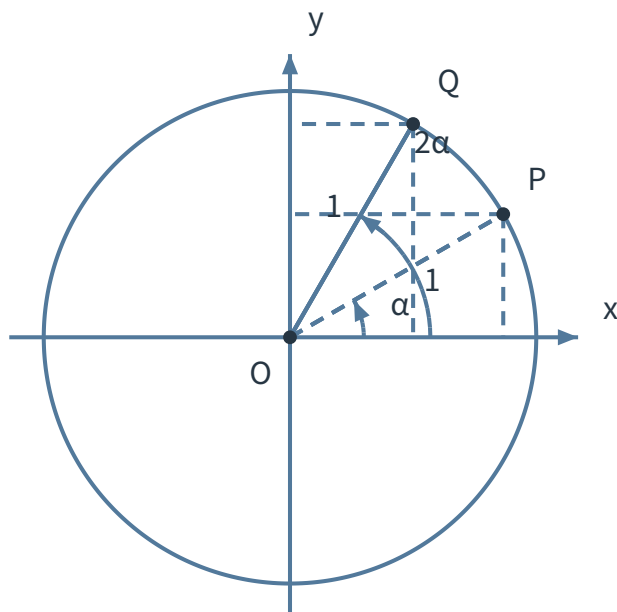
例えば、正弦の加法定理 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ で、 $A = B = \alpha$ とすると次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

ここで注意したいのは、 $\sin 2\alpha$ と $2 \sin \alpha$ は意味が異なることである。 $\sin 2\alpha$ は「角を 2 倍してから、その角の正弦を求める」操作であり、 $2 \sin \alpha$ は「正弦の値を 2 倍する」操作である。

例えば、 $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ のとき、

$\sin 2\alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。一方、 $2 \sin \alpha = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ であり、2 つの値は一致しない。
したがって、角の 2 倍と値の 2 倍を混同しないことが重要である。

図1 角 α と角 2α を表す単位円

余弦の2倍角

余弦の加法定理 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ で $A = B = \alpha$ とすると次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

さらに、三角関数の基本関係式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ を使うと、次の2つの形も得られる。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

また、同じ基本関係式を用いると次の形も得られる。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

使う形を選ぶ基準は、与えられている値を見ることである。 $\cos \alpha$ だけが分かっているなら $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ を使うと、 $\sin \alpha$ を求める必要がない。 $\sin \alpha$ だけが分かっているなら $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ を使うことで、不要な平方根計算を避けられる。

符号と平方根に注意する場合

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ では、 $\cos \alpha$ の符号が必要になる。

例えば、 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ だけが与えられている場合、 $\cos \alpha$ は $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ から大きさを求められるが、符号は角 α がどの象限にあるかで決まる。

第1象限なら $\cos \alpha > 0$ 、第2象限なら $\cos \alpha < 0$ である。平方根を取るときは、必ず角の範囲を確認する。

正接の 2 倍角

正接の加法定理 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ で $A = B = \alpha$ とすると次のように計算できる。 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ となる。

ただし、この式を使うには条件がある。まず $\tan \alpha$ が定義される必要があるため、 $\cos \alpha \neq 0$ でなければならない。また、分母が 0 にならないことも必要である。

つまり、 $1 - \tan^2 \alpha \neq 0$ を確認する必要がある。

分母が 0 になる場合、分数の値を 0 と考えてはいけない。式そのものが定義できない。

なお、 $\tan \alpha$ が未定義だからといって、必ず $\tan 2\alpha$ も未定義になるわけではない。例えば $\alpha = \frac{\pi}{2}$ では $\tan \alpha$ は未定義だが、 $2\alpha = \pi$ なので $\tan 2\alpha = 0$ である。

一方、 $\sin 2\alpha$ や $\cos 2\alpha$ の倍角公式は、一般の実数角 α で成立する。

例題 1：第 1 象限での倍角の計算

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で、 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ であるとき、 $\cos \alpha$ 、 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ を求めなさい。

また、 $\cos 2\alpha$ を $\sin \alpha$ から直接求められる理由を説明しなさい。

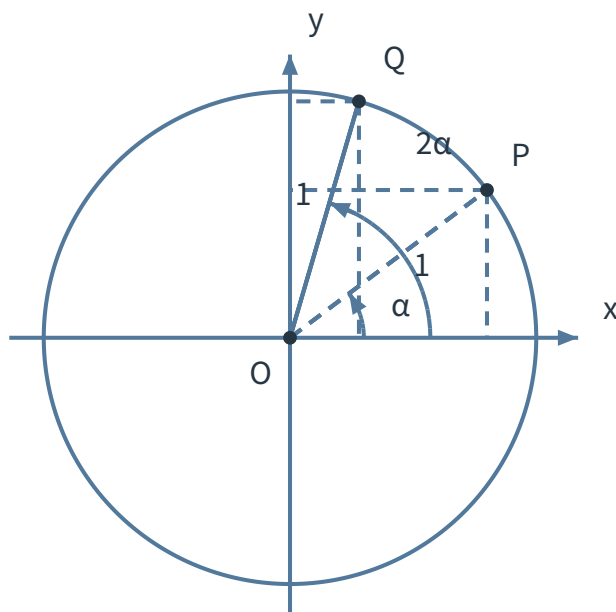


図 2 第 1 象限の点 P と角 2α に対応する点 Q

例題 1 の解答・解説

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より、 α は第 1 象限の角である。したがって、 $\cos \alpha$ は正である。

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25}\end{aligned}$$

よって、 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ である。

正弦の倍角公式を使うと、 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ より、 $\sin 2\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$ となる。

また、余弦の倍角公式は $\sin \alpha$ だけで表せる。 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ であるから、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{18}{25} \\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

$\cos 2\alpha$ を求めるだけなら、 $\cos \alpha$ を求めずに $\sin \alpha$ から直接計算できる。これは $\cos 2\alpha$ に $\sin \alpha$ だけを含む形の公式があるためである。

例題 2：第 2 象限での倍角の計算

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で、 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ であるとき、 $\cos \alpha$ 、 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ を求めなさい。

例題 1 と比べて変わる符号と変わらない値を理由とともに説明しなさい。また、 2α の象限を確認しなさい。

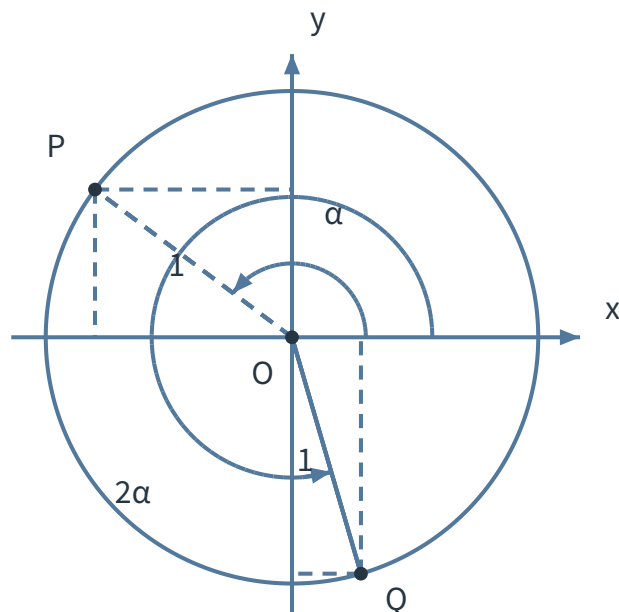


図3 第2象限の点Pから出発する具体例（円弧は反時計回り）

例題2の解答・解説

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より、 α は第2象限の角である。第2象限では余弦が負になるため、 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ である。正弦の倍角公式より、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= -\frac{24}{25}\end{aligned}$$

余弦の倍角公式を使うと、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

例題1と比べると、 $\sin \alpha$ の値は同じであるが、 $\cos \alpha$ の符号が変わる。そのため、 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ の符号は変化する。一方、 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ では $\sin \alpha$ が平方になっているため、値は変わらない。

また、 $\sin 2\alpha < 0$ 、 $\cos 2\alpha > 0$ であるから、 2α は第4象限の角である。これは計算結果から判断したものであり、第2象限の角を2倍すると常に第4象限になるわけではない。

例題 3：正接の倍角

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で、 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ であるとき、 $\tan 2\alpha$ を求めなさい。
また、正接の倍角公式を使う条件を確認しなさい。

例題 3 の解答・解説

正接の倍角公式 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ を使う。

ここで、 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ より、 $1 - \tan^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ となり、分母は 0 ではない。
したがって、公式を適用できる。

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって、 $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$ である。

この公式を使う前には、 $\tan \alpha$ が定義されることと、分母 $1 - \tan^2 \alpha$ が 0 でないことを確認する必要がある。

演習問題**演習 1：加法定理から倍角公式を導く**

加法定理を利用して、次の式を導きなさい。

- (1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

演習 2：与えられた値に合う公式を選ぶ

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で、 $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ であるとき、 $\cos 2\alpha$ を求めなさい。
また、なぜ $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ の形を使うとよいか説明しなさい。

演習 3：象限による符号の判断

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で、 $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ であるとき、 $\cos \alpha$ と $\sin 2\alpha$ を求めなさい。

演習 4：余弦の 3 つの形を使い分ける

次の値を求めなさい。

- (1) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ のとき、 $\cos 2\alpha$ を求めなさい。
 - (2) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ のとき、 $\cos 2\alpha$ を求めなさい。
- ただし、必要な式を選んで計算しなさい。

演習 5：正接の倍角計算

$\tan \alpha = 3$ であるとき、正接の倍角公式が使える条件を確認した上で、 $\tan 2\alpha$ を求めなさい。

演習 6：正接の倍角公式が使えない場合

$\tan \alpha = 1$ であるとき、正接の倍角公式 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ が使えない理由を説明しなさい。
また、このことは $\tan 2\alpha$ が必ず未定義であることを意味するか答えなさい。

演習 7：角の 2 倍と値の 2 倍の違い

$\alpha = 45^\circ$ のとき、次の値を比較しなさい。

- (1) $\sin 2\alpha$
- (2) $2 \sin \alpha$

角を 2 倍する操作と値を 2 倍する操作の違いを説明しなさい。

演習 8：倍角公式の条件を整理する

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $\tan \alpha$ が定義されるか答えなさい。
- (2) 正接の倍角公式を使って $\tan 2\alpha$ を求めることができるか答えなさい。
- (3) 実際の $\tan 2\alpha$ の値を求めなさい。

正接の倍角公式を使う条件と、 $\tan 2\alpha$ そのものが定義される条件の違いを説明しなさい。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

加法定理で 2 つの角を同じ角にすると、倍角公式になる。

(1) 正弦の加法定理 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ において、 $A = B = \alpha$ とする。
次のように計算する。

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

よって、 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ である。

(2) 余弦の加法定理 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ において、 $A = B = \alpha$ とする。
次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

よって、 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ である。

演習 2 の解答・解説

$\cos \alpha$ が与えられているため、 $\cos \alpha$ だけを使う形を選ぶ。

次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 2 \left(\frac{5}{13} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{50}{169} - \frac{169}{169} \\ &= -\frac{119}{169}\end{aligned}$$

したがって、 $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$ である。

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ を使うと、 $\sin \alpha$ を求める必要がないため、平方根計算を避けられる。

演習 3 の解答・解説

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より、 α は第 2 象限にある。第 2 象限では余弦が負になる。

次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - \left(\frac{12}{13} \right)^2 \\ &= \frac{25}{169}\end{aligned}$$

よって、 $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ である。

さらに、 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ より、 $\sin 2\alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \left(-\frac{5}{13} \right) = -\frac{120}{169}$ となる。

平方根で大きさを求めた後、象限によって符号を決めることが重要である。

演習 4 の解答・解説

(1) $\sin \alpha$ が与えられているため、 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ を使う。
次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

よって、 $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$ である。

(2) $\cos \alpha$ が与えられているため、 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ を使う。
次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{8}{9} - 1 \\ &= -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

よって、 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$ である。

与えられた値をそのまま使える形を選ぶことで、不要な計算を減らせる。

演習 5 の解答・解説

正接の倍角公式を使うには、 $\tan \alpha$ が定義され、さらに分母が 0 でない必要がある。

$\tan \alpha = 3$ より、 $1 - \tan^2 \alpha = 1 - 9 = -8$ であり、0 ではない。

したがって公式を使える。

次のように計算する。

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{2 \times 3}{1 - 9} \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

よって、 $\tan 2\alpha = -\frac{3}{4}$ である。

演習 6 の解答・解説

$\tan \alpha = 1$ より、 $\tan \alpha$ は定義されているため、 $\cos \alpha \neq 0$ である。

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1$ だから、 $\sin \alpha = \cos \alpha$ である。三角関数の基本関係式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ を使うと、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって、余弦の倍角公式から次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

また、 $\sin \alpha = \cos \alpha$ より、 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha = 1$ となる。

よって、 2α では $\cos 2\alpha = 0$ であるため、 $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ は未定義である。

正接の倍角公式が使えない理由は、分母 $1 - \tan^2 \alpha$ が 0 になるためであり、この場合は実際にも倍角後の正接が未定義になる。これは、元の $\tan \alpha$ が未定義でも $\tan 2\alpha$ が定義される場合とは区別する必要がある。

演習 7 の解答・解説

$\alpha = 45^\circ$ なので、 $2\alpha = 90^\circ$ である。

(1) $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$ となる。

(2) $2 \sin \alpha = 2 \sin 45^\circ$ より、 $2 \sin \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ となる。

したがって、 $\sin 2\alpha \neq 2 \sin \alpha$ である。

$\sin 2\alpha$ は角を 2 倍してから正弦を求める操作であり、 $2 \sin \alpha$ は正弦の値を 2 倍する操作である。2 つは異なる操作である。

演習 8 の解答・解説

(1) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos \alpha = 0$ であるため、 $\tan \alpha$ は定義されない。

(2) 正接の倍角公式は $\tan \alpha$ を使う式であるため、この場合は公式を使って計算できない。

また、 $\tan 2\alpha$ の定義条件は 2α について確認する必要がある。

(3) $2\alpha = \pi$ であるから、 $\tan 2\alpha = \tan \pi = 0$ となる。

したがって、 $\tan \alpha$ が未定義でも $\tan 2\alpha$ が定義される場合がある。正接の倍角公式の使用条件と、倍角後の角の正接が定義される条件は分けて考える必要がある。