

第 131 講 最大・最小

学習目標

- ・ 閉区間における多項式関数の最大値・最小値を求められるようになる。
- ・ 最大値・最小値を調べる時、端点と $f'(x) = 0$ となる点を候補として調べる理由を理解する。
- ・ 極大・極小と最大値・最小値の違いを区別し、区間外の候補を除外できるようになる。
- ・ 最大値・最小値をとる値だけでなく、その値をとる x も正しく答えられるようになる。

最大値・最小値

関数 $f(x)$ が区間内のある点 a で最大値をとるとは、区間内のすべての x に対して $f(x) \leq f(a)$ が成り立つことである。このとき $f(a)$ を最大値という。

同様に、関数 $f(x)$ が区間内のある点 a で最小値をとるとは、区間内のすべての x に対して $f(x) \geq f(a)$ が成り立つことである。このとき $f(a)$ を最小値という。

最大値・最小値を調べる考え方

関数の最大値・最小値を考えると、まず「その値が本当に区間内でとられるか」を確認する必要がある。

多項式関数は連続な関数であり、有限の閉区間 $a \leq x \leq b$ (ただし $a < b$) では、必ず最大値と最小値を実際にとる。

つまり、区間の中で関数の値が最大になる点と最小になる点が存在するため、その点を探せばよい。最大値や最小値をとる点が区間内部にある場合を考える。非定数多項式では、その点を c とすると、全体の最大値をとる点では近くのすべての x に対して $f(x) \leq f(c)$ が成り立ち、全体の最小値をとる点では近くのすべての x に対して $f(x) \geq f(c)$ が成り立つ。このような内部の最大点・最小点では微分可能であり、第 130 講で学んだ必要条件から $f'(c) = 0$ を満たす。

一方、区間の端点では片側しか区間内の変化を調べられないため、この必要条件は必ずしも成り立たない。

したがって、非定数多項式について有限閉区間で最大値・最小値を求める場合は、端点と区間内部の $f'(x) = 0$ となる点をすべて候補にして比較すればよい。

この方法で十分なのは、多項式が連続であり、最大値・最小値をとる場所が「端点」または「内部で傾きが 0 になる点」のどちらかに限られるためである。

最大・最小を求める手順

有限閉区間 $a \leq x \leq b$ (ただし $a < b$) で、非定数多項式 $f(x)$ の最大値・最小値を求めるときは、次の手順で考える。

1. 導関数 $f'(x)$ を求める。
2. $f'(x) = 0$ を解き、区間内部にある解を候補に加える。
3. 端点 $x = a, b$ を候補に加える。
4. すべての候補での関数の値を計算する。
5. 値を比較し、最大値・最小値と、それをとるすべての x を答える。

候補を調べる時は、区間外の点を含めないことに注意する。

ただし、定数関数 $f(x) = c$ の場合は考え方が異なる。

区間内のすべての x で同じ値 c をとるため、最大値も最小値も c である。また、その値をとる x は区間内のすべての点である。

この場合は $f'(x) = 0$ となる点を有限個の候補として列挙する必要はない。

極大・極小との違い

極大・極小は、ある点の近くだけを見たときの山や谷である。

一方、最大値・最小値は指定された区間全体で比較した結果で決まる。

そのため、極大値がその区間での最大値になるとは限らない。また、極小値がその区間での最小値になるとも限らない。

例えば、区間外にある極大・極小の点は、最大値・最小値の候補には入れない。候補は必ず指定された区間内にあるものだけを調べる。

注意

「閉区間では最大値・最小値が存在する」という性質は、今回扱う多項式のような連続関数を有限閉区間 $a \leq x \leq b$ で考える場合に成り立つ。

一般の関数について、閉区間であれば必ず最大値・最小値が存在すると考えてはいけない。

また、最大値・最小値を答えるときは、値だけでなく、その値をとるすべての x を確認する。同じ値を複数の場所でとる場合は、そのすべてを答える必要がある。

さらに、开区間では端点の値に近づいても、その端点自体を含まないため、最大値・最小値を実際にとれない場合がある。

例題 1

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ について、区間 $-2 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

最大値・最小値を調べるために、端点と $f'(x) = 0$ となる点を候補にする。

まず導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

したがって、 $3x^2 - 3 = 0$ より、 $x^2 = 1$ となるので、 $x = -1, 1$ である。

これらは区間 $-2 \leq x \leq 2$ の内部にあるため候補になる。

また、端点 $x = -2, 2$ も候補である。

候補は $x = -2, -1, 1, 2$ である。

それぞれの値を求める。

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) = -8 + 6 = -2$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$$

値を比較すると、最大の値は 2、最小の値は -2 である。

最大値 2 は $x = -1, 2$ でとる。

最小値 -2 は $x = -2, 1$ でとる。

同じ値をとる点が複数あるため、すべての x を答える必要がある。

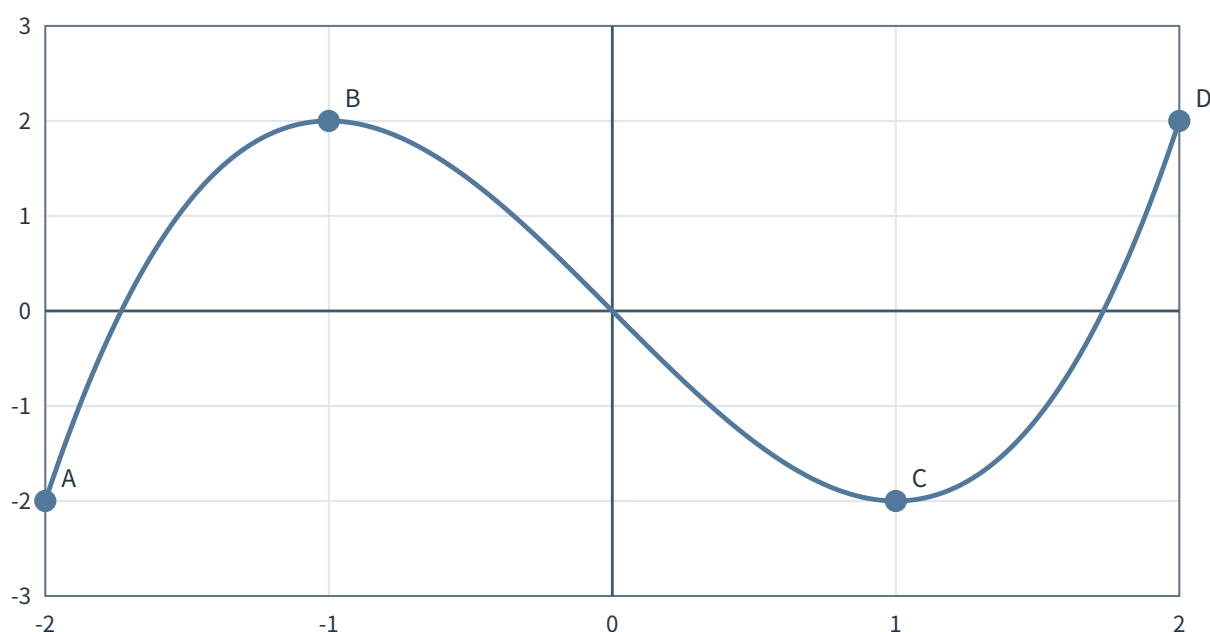


図1 $y = x^3 - 3x$ を閉区間 $-2 \leq x \leq 2$ だけに描いた曲線。塗りつぶしの点は最大・最小の候補。

点	x	候補に入れる理由	$f(x)$
A	-2	左端点	-2
B	-1	区間内部で $f'(x) = 0$	2
C	1	区間内部で $f'(x) = 0$	-2
D	2	右端点	2

最大値は 2 で、 $x = -1, 2$ のときにとる。最小値は -2 で、 $x = -2, 1$ のときにとる。端点と区間内部の候補をすべて比較する。

例題 2

関数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ について、区間 $-2 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

因数分解すると、 $f'(x) = 4x(x^2 - 1)$ である。

したがって、 $4x(x^2 - 1) = 0$ より、 $x = -1, 0, 1$ を得る。

ただし、区間は $-2 \leq x \leq 1$ であるため、すべての点が候補になる。

端点も含めると候補は $x = -2, -1, 0, 1$ である。

$x = 1$ は端点であると同時に $f'(1) = 0$ となる点でもあるが、同じ候補を重複して調べる必要はない。それぞれの値を計算する。

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 = 16 - 8 = 8$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

比較すると、最大値は8、最小値は-1である。

最大値8は $x = -2$ でとる。

最小値-1は $x = -1, 1$ でとる。

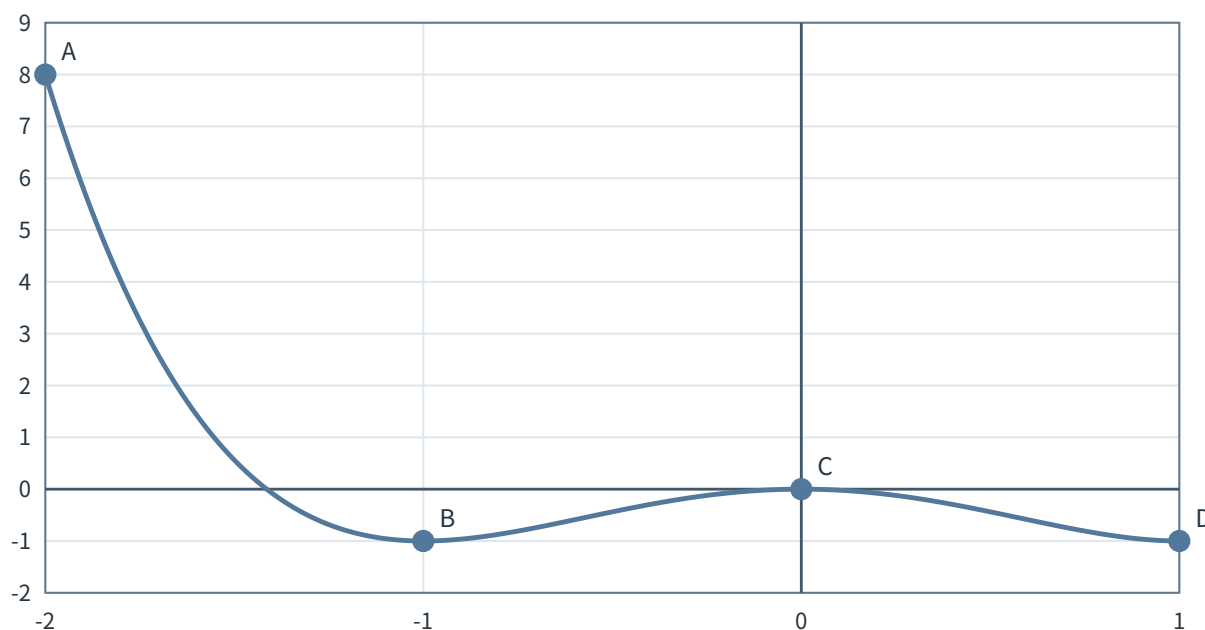


図2 $y = x^4 - 2x^2$ を閉区間 $-2 \leq x \leq 1$ だけに描いた曲線。塗りつぶしの点は最大・最小の候補。

点	x	候補に入れる理由	$f(x)$
A	-2	左端点	8
B	-1	区間内部で $f'(x) = 0$	-1
C	0	区間内部で $f'(x) = 0$	0
D	1	右端点 ($f'(1) = 0$)	-1

最大値は8で、 $x = -2$ のときにとる。最小値は-1で、 $x = -1, 1$ のときにとる。 $x = 1$ は右端点であり、同時に $f'(1) = 0$ も満たすが、一つの候補として数える。

例題3

関数 $f(x) = x^2$ について、区間 $1 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めなさい。

例題3の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 2x$$

$f'(x) = 0$ より、 $2x = 0$ なので、 $x = 0$ である。

しかし、区間は $1 \leq x \leq 3$ であり、 $x = 0$ は区間外にある。

したがって、 $x = 0$ は今回の最大値・最小値の候補にはならない。
 残る候補は端点 $x = 1, 3$ である。
 値を計算する。

$$f(1) = 1$$

$$f(3) = 9$$

比較すると、最小値は 1、最大値は 9 である。

最小値 1 は $x = 1$ でとる。

最大値 9 は $x = 3$ でとる。

導関数から得られた点でも、区間外にあるものは最大値・最小値の候補から除外することが重要である。

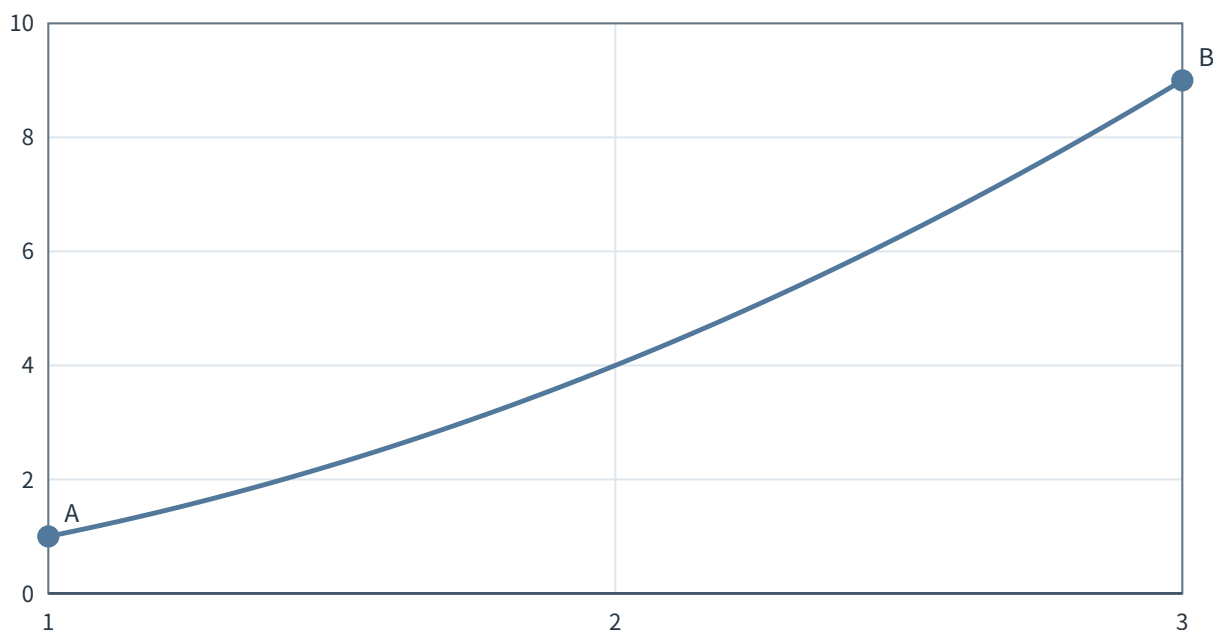


図3 $y = x^2$ を閉区間 $1 \leq x \leq 3$ だけに描いた曲線。塗りつぶしの点は最大・最小の候補。

点	x	候補に入れる理由	$f(x)$
A	1	左端点	1
B	3	右端点	9

区間内部では $f'(x) = 2x > 0$ であり、 $f'(x) = 0$ となる点はない。両端点を比較すると、最小値は 1 ($x = 1$)、最大値は 9 ($x = 3$) である。

練習問題 1

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ について、区間 $0 \leq x \leq 4$ における最大値と最小値を求めなさい。

練習問題 2

関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ について、区間 $-1 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値を求めなさい。

練習問題 3

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ について、区間 $0 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めなさい。

練習問題 4

関数 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ について、区間 $-2 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値を求めなさい。

練習問題 5

関数 $f(x) = 2x + 1$ について、区間 $-3 \leq x \leq 5$ における最大値と最小値を求めなさい。

練習問題 6

関数 $f(x) = 7$ について、区間 $-2 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求め、その値をとる x をすべて答えなさい。

練習問題 7

関数 $f(x) = x^2$ について、区間 $-3 < x < 2$ における最大値と最小値について調べなさい。最大値・最小値が存在するかどうかを答えなさい。

練習問題 8

関数 $f(x) = x^3 - 12x$ について、区間 $-1 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めなさい。

練習問題 1 の解答・解説

最大値・最小値を求めるため、端点と $f'(x) = 0$ となる点を調べる。

まず導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

因数分解すると、 $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$ より、 $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ である。

したがって、 $f'(x) = 0$ となる点は $x = 1, 3$ である。

区間は $0 \leq x \leq 4$ なので、 $x = 1, 3$ はどちらも区間内にある。

端点も候補に加える。

候補は $x = 0, 1, 3, 4$ である。

それぞれの値を計算する。

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

$$f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$$

$$f(4) = 64 - 96 + 36 = 4$$

比較すると、最大値は 4、最小値は 0 である。

最大値 4 は $x = 1, 4$ でとる。

最小値 0 は $x = 0, 3$ でとる。

端点と内部の停留点を両方確認することで、最大値・最小値の取りこぼしを防げる。

練習問題 2 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 2x - 4$$

したがって、 $2x - 4 = 0$ より、 $x = 2$ である。

しかし、区間は $-1 \leq x \leq 2$ なので、 $x = 2$ は区間の端点であり、候補として調べる。

候補は端点 $x = -1, 2$ である。

値を計算する。

$$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 1 + 4 + 5 = 10$$

$$f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$$

比較すると、最大値は 10、最小値は 1 である。

最大値 10 は $x = -1$ でとる。

最小値 1 は $x = 2$ でとる。

端点を候補から外すと、この問題では最大値を見落としてしまう。

練習問題 3 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

因数分解すると、 $f'(x) = 3x(x - 2)$ である。

したがって、 $f'(x) = 0$ より、 $x = 0, 2$ を得る。

区間は $0 \leq x \leq 3$ なので、どちらも候補である。

端点 $x = 3$ も候補に加える。

候補は $x = 0, 2, 3$ である。

値を計算する。

$$f(0) = 2$$

$$f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$$

$$f(3) = 27 - 27 + 2 = 2$$

比較すると、最大値は 2、最小値は -2 である。

最大値 2 は $x = 0, 3$ でとる。

最小値 -2 は $x = 2$ でとる。

端点で同じ最大値をとる場合もあるため、候補の値はすべて比較する必要がある。

練習問題 4 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

因数分解すると、 $f'(x) = 4x(x^2 - 2)$ である。

よって、 $4x(x^2 - 2) = 0$ より、 $x = 0, \pm\sqrt{2}$ となる。

区間 $-2 \leq x \leq 2$ にすべて含まれるため、候補になる。

端点も加える。

候補は $x = -2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2$ である。

値を計算する。

$$\text{端点では、} f(-2) = 16 - 16 + 3 = 3$$

$$f(2) = 16 - 16 + 3 = 3 \text{ である。}$$

また、 $x = 0$ では、 $f(0) = 3$ である。

$x = \pm\sqrt{2}$ では、 $x^2 = 2$ 、 $x^4 = 4$ なので、 $f(\pm\sqrt{2}) = 4 - 8 + 3 = -1$ となる。

比較すると、最大値は 3、最小値は -1 である。

最大値 3 は $x = -2, 0, 2$ でとる。

最小値 -1 は $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ でとる。

同じ値をとる点が複数ある場合、すべて答える必要がある。

練習問題 5 の解答・解説

導関数を求める。

$f'(x) = 2$ である。

常に $f'(x) = 2 > 0$ なので、この関数は指定された閉区間 $-3 \leq x \leq 5$ 全体で厳密に増加する。
したがって、最も小さい値は左端で、最も大きい値は右端でとる。

候補は端点 $x = -3, 5$ である。

それぞれの値を計算する。

$$f(-3) = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5$$

$$f(5) = 2(5) + 1 = 10 + 1 = 11$$

比較すると、最小値は -5 、最大値は 11 である。

最小値 -5 は $x = -3$ でとる。

最大値 11 は $x = 5$ でとる。

この問題では導関数が常に正であることから関数が区間全体で厳密に増加しているため、内部の点を調べる必要はなく、両端を比較すればよい。

練習問題 6 の解答・解説

関数は定数関数である。

導関数を求めると、 $f'(x) = 0$ である。

しかし、定数関数では区間内のすべての点で同じ値をとる。

区間 $-2 \leq x \leq 3$ のすべての x について、 $f(x) = 7$ である。

したがって、最大値は 7 、最小値も 7 である。

最大値をとる x は $-2 \leq x \leq 3$ のすべての点である。

最小値をとる x も同じく、 $-2 \leq x \leq 3$ のすべての点である。

定数関数では、特定の 1 点ではなく区間全体が最大値・最小値をとる場所になる。

練習問題 7 の解答・解説

区間が $-3 < x < 2$ という开区間であることに注意する。

関数 $f(x) = x^2$ について考える。

まず最小値を調べる。

平方の値は必ず 0 以上なので、 $x^2 \geq 0$ である。

また、 $x = 0$ は定義域内に含まれるため、 $f(0) = 0$ となる。

したがって、最小値は 0 であり、 $x = 0$ でとる。

次に最大値を考える。

定義域内では、 $0 \leq x^2 < 9$ である。

$x = -3$ は区間に含まれないため、 $f(-3) = 9$ という値は実際にはとらない。

しかし、 x を -3 に近づけると、 x^2 は 9 にいくらでも近づく。

さらに、任意の定義域内の点 x を考える。 $r = |x|$ とすると $r < 3$ である。

このとき、次のように計算する。

$$z = -\frac{r+3}{2}$$

とおくと、 $-3 < z < 2$ なので z も定義域内にある。

また、次のように計算する。

$$|z| = \frac{r+3}{2}$$

であり、次のように計算する。

$$r < \frac{r+3}{2} < 3$$

だから、 $z^2 > x^2$ となる。

つまり、どの点で値をとっても、それより大きい値をとる別の点が区間内に存在する。

したがって、最大値になる値は存在しない。

以上より、最小値は 0 で $x = 0$ のときにとり、最大値は存在しない。

練習問題 8 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

因数分解すると、 $f'(x) = 3(x^2 - 4)$ である。

したがって、 $3(x^2 - 4) = 0$ より、 $x = -2, 2$ となる。

区間は $-1 \leq x \leq 3$ なので、 $x = -2$ は区間外であり候補から除外する。

一方、 $x = 2$ は区間内なので候補になる。

端点も加える。

候補は $x = -1, 2, 3$ である。

値を計算する。

$$f(-1) = (-1)^3 - 12(-1) = -1 + 12 = 11$$

$$f(2) = 8 - 24 = -16$$

$$f(3) = 27 - 36 = -9$$

比較すると、最大値は 11、最小値は -16 である。

最大値 11 は $x = -1$ でとる。

最小値 -16 は $x = 2$ でとる。

区間外の停留点を調べても、最大値・最小値の候補にはならない。指定された区間内だけで比較することが重要である。