

第 177 講 無理関数

学習目標

- 平方根を含む関数の定義域・値域を、根号内の条件と平方根の性質から判断できる。
- $y = \sqrt{ax+b} + c$ や $y = -\sqrt{ax+b} + c$ のグラフの変化を、基本形との関係から説明できる。

根号を含む関数を見る視点

関数では、入力する値 x の範囲と、その結果として出てくる値 y の範囲を確認することが重要である。平方根を含む関数では、まず根号の中が意味を持つ条件を調べる。例えば、 $y = \sqrt{x}$ では平方根の中身 x が 0 以上でなければならないため、定義域は $x \geq 0$ である。また、平方根の記号は非負の主平方根を表す。任意の $t \geq 0$ に対して、 $\sqrt{t}$ は二乗すると t になり、かつ非負である実数をただ 1 つ表す。したがって、 $\sqrt{9} = 3$ である。一方、方程式 $u^2 = 9$ の解は $u = 3, -3$ の 2 つであり、平方根の記号が表す値とは異なる。この違いを理解すると、平方根を含む関数の値域も判断できる。

無理関数の定義

変数を根号内に含む無理式で表される関数を無理関数という。この講では、 x を実数とし、 a, b, c を x によらない実定数、 $a \neq 0$ として、

$$y = \sqrt{ax+b} + c$$

および

$$y = -\sqrt{ax+b} + c$$

を別々の関数として扱う。定義域は根号内の条件 $ax+b \geq 0$ から決まる。ただし、一般の根号を含む式では、分母に変数が含まれる場合など、根号以外の条件も確認する必要がある。 $\sqrt{ax+b}$ は非負の主平方根を表し、外側の負号はその値を求めた後に掛けるものである。

基本形 $y = \sqrt{x}$ の性質

基本となる関数

$$y = \sqrt{x}$$

を考える。根号内の条件より

$$x \geq 0$$

である。また、根号が表す主平方根は非負なので

$$y \geq 0$$

となる。ここで、任意の $y \geq 0$ を考える。 $x = y^2$ とおけば、 $x \geq 0$ であり、

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2} = y$$

となる。したがって、 y は 0 以上のすべての値を取ることができる。一方、 $y^2 = x$ とだけ考えると $y = \pm\sqrt{x}$ のように負の側の枝も含む。これは関数 $y = \sqrt{x}$ とは異なる。無理関数では、主平方根の非負性によって片側の枝だけを選んでいくことが重要である。

無理関数の見方

$y = \sqrt{ax+b} + c$ の端点は、根号内が 0 になる位置で決まる。端点の x 座標は $-\frac{b}{a}$ であり、端点そのものは $(-\frac{b}{a}, c)$ である。 $a > 0$ のときは $ax+b \geq 0$ より $x \geq -\frac{b}{a}$ となる。 $a < 0$ のときは負数で割るため不等号が反転し、 $x \leq -\frac{b}{a}$ となる。端点の x 座標は定義域に含まれ、端点はグラフ上の点である。値域については、 $y = \sqrt{ax+b} + c$ では $y \geq c$ 、 $y = -\sqrt{ax+b} + c$ では $y \leq c$ である。任意の $t \geq 0$ に対して $x = \frac{t^2-b}{a}$ と取ると $ax+b = t^2$ となり、 $\sqrt{ax+b} = t$ を実現できるため、その範囲のすべての値を取る。2つのグラフは水平線 $y = c$ に関して反射した関係であり、 $c \neq 0$ のときに単純な x 軸反射ではない。左右への広がりや上下への広がりや根号の外側の符号によって決まる。

符号の注意

根号の外側の負号と、根号の中の x の符号は別の働きを持つ。例えば、 $y = -\sqrt{x}$ は $y = \sqrt{x}$ を上下反転した関数である。一方、 $y = \sqrt{-x}$ は定義域の向きが変わり、左側へ広がる関数になる。「負号があるから同じ反転」と考えず、どの場所の符号かを確認する必要がある。

例題 1

関数 $y = \sqrt{x}$ について、次を求めなさい。

- (1) 定義域
- (2) 値域
- (3) 端点
- (4) 点 $(0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3)$ がグラフ上の点であることを確認し、グラフの枝について説明しなさい。

例題 1 の解答・解説

- (1) 根号内が 0 以上である必要があるため、定義域は $x \geq 0$ である。
- (2) 根号が表す主平方根の値は非負なので、値域は $y \geq 0$ である。任意の $y \geq 0$ に対して $x = y^2$ と取れば、 $\sqrt{x} = y$ となるため、この範囲のすべての値を実現できる。
- (3) $x = 0$ は端点の x 座標である。このとき $y = \sqrt{0} = 0$ なので、端点は $(0, 0)$ である。
- (4) $\sqrt{0} = 0$ 、 $\sqrt{1} = 1$ 、 $\sqrt{4} = 2$ 、 $\sqrt{9} = 3$ より、 $(0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3)$ はグラフ上の点である。ただし、有限個の点だけでグラフ全体を決めることはできない。 $y = \sqrt{x}$ は $y \geq 0$ の枝だけを表すことが重要である。

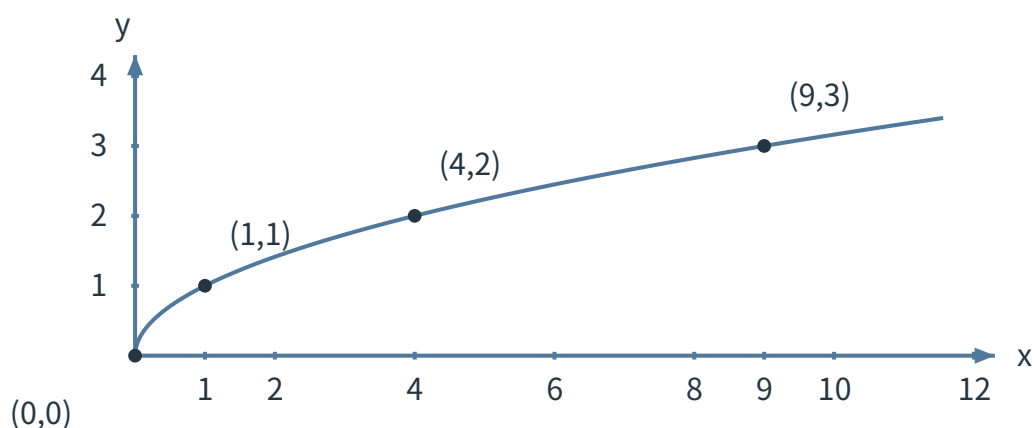


図1 実線は $y = \sqrt{x}$ のグラフの一部である。定義域は $x \geq 0$ で、端点 $(0,0)$ を含むため閉点で示した。他の黒点は代表点である。表示窓は全定義域ではなく、曲線の反対側の表示端は定義域の端を表さない。

例題 2

関数 $y = \sqrt{x-1} + 2$ について、次を求めなさい。

- (1) 定義域
- (2) 値域
- (3) 端点
- (4) 基本形 $y = \sqrt{x}$ からの変化を説明し、点 $(1, 2), (2, 3), (5, 4), (10, 5)$ を確認しなさい。

例題 2 の解答・解説

- (1) 根号内の条件より $x - 1 \geq 0$ であるため、定義域は $x \geq 1$ である。
- (2) 根号が表す主平方根は非負なので、値域は $y \geq 2$ である。任意の $y \geq 2$ に対して $x = 1 + (y - 2)^2$ と取ると、定義域を満たし、

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{(y-2)^2} = y-2$$

となるため、この範囲のすべての値を実現できる。

- (3) $x = 1$ は端点の x 座標である。このとき $y = \sqrt{0} + 2 = 2$ なので、端点は $(1, 2)$ である。
- (4) $y = \sqrt{x}$ を右へ 1、上へ 2 移動したグラフである。

$$\sqrt{1-1} + 2 = 2$$

$$\sqrt{2-1} + 2 = 3$$

$$\sqrt{5-1} + 2 = 4$$

$$\sqrt{10-1} + 2 = 5$$

したがって、指定された 4 点を通る。

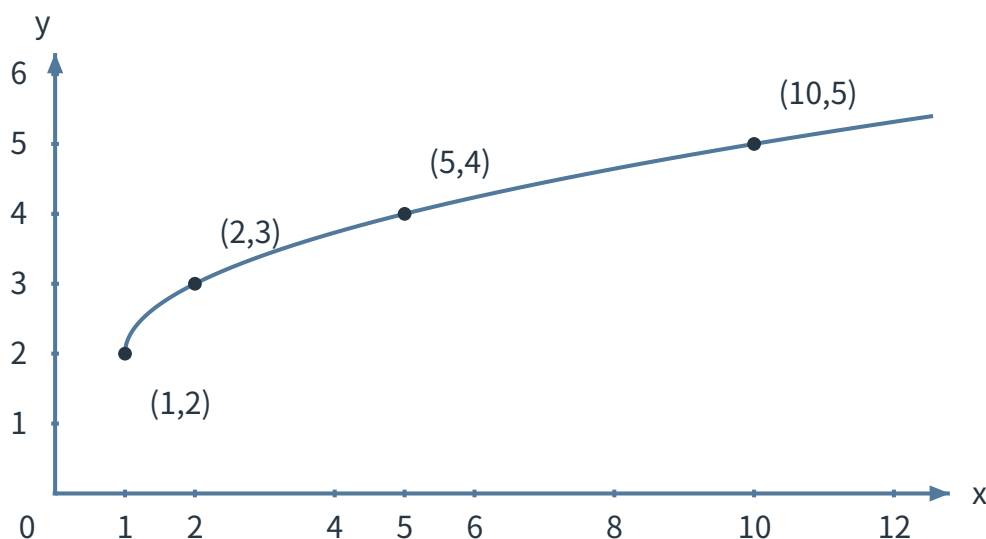


図2 実線は $y = \sqrt{x-1} + 2$ のグラフの一部である。定義域は $x \geq 1$ で、端点 $(1, 2)$ を含むため閉点で示した。他の黒点は代表点である。表示窓は全定義域ではなく、曲線の反対側の表示端は定義域の端を表さない。

例題 3

関数 $y = -\sqrt{4-x} + 1$ について、次を求めなさい。

- (1) 定義域
- (2) 値域
- (3) 端点
- (4) 基本形との関係を説明し、点 $(4, 1), (3, 0), (0, -1), (-5, -2)$ を確認しなさい。

例題 3 の解答・解説

- (1) 根号内の条件より $4 - x \geq 0$ である。両辺を -1 で割るため不等号が反転し、 $x \leq 4$ となる。
- (2) $\sqrt{4-x}$ は非負なので、 $-\sqrt{4-x} \leq 0$ であり、 $y \leq 1$ となる。任意の $y \leq 1$ に対して $t = 1 - y \geq 0$ と置き、 $x = 4 - t^2$ と取れば $x \leq 4$ で実現できる。
- (3) $x = 4$ は端点の x 座標である。このとき $y = -\sqrt{0} + 1 = 1$ なので、端点は $(4, 1)$ である。
- (4) 基本形の点 $(u, \sqrt{u})$ 、 $u \geq 0$ は、

$$(4 - u, 1 - \sqrt{u})$$

へ対応する。これは基本形をまず y 軸に関して反射し、次に x 軸に関して反射し、その後右へ 4、上へ 1 移す変化である。4 点について、 $x = 4, 3, 0, -5$ を代入すると、それぞれ $y = 1, 0, -1, -2$ となる。根号外の負号は負の平方根を選んでいるのではなく、非負の主平方根を求めた後に値を反転している。

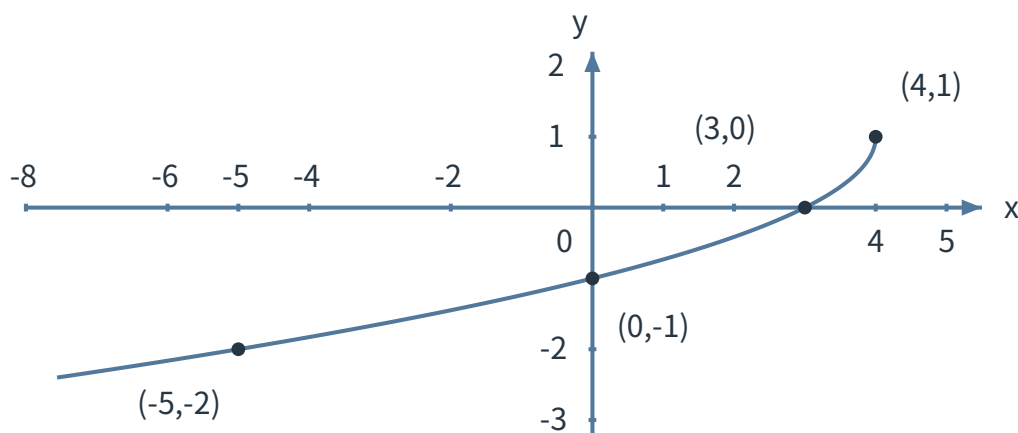


図3 実線は $y = -\sqrt{4-x} + 1$ のグラフの一部である。定義域は $x \leq 4$ で、端点 $(4, 1)$ を含むため閉点で示した。他の黒点は代表点である。
表示窓は全定義域ではなく、曲線の反対側の表示端は定義域の端を表さない。

演習問題

練習問題 1

関数 $y = \sqrt{x+2}$ について、次を求めなさい。

- (1) 定義域
- (2) 値域
- (3) 端点

練習問題 2

関数 $y = \sqrt{3-x}$ について、次を求めなさい。

- (1) 定義域
- (2) 値域
- (3) 端点
- (4) グラフの枝が左へ広がる理由を説明しなさい。

練習問題 3

関数 $y = -\sqrt{x-2} + 4$ について、次を求めなさい。

- (1) 定義域
- (2) 値域
- (3) 端点
- (4) 根号内の $x-2$ の -2 と、根号の外側の負号が、それぞれどのような働きをするか説明しなさい。

練習問題 4

関数 $y = \sqrt{2x-4} - 1$ について、次を求めなさい。

- (1) 定義域
- (2) 値域
- (3) 端点
- (4) $x = 4$ のときの y の値を求めなさい。

練習問題 5

関数

$$y = \sqrt{x-p} + q$$

の端点が $(3, -2)$ であるとき、 p, q を求めなさい。さらに、この関数が点 $(4, -1)$ を通ることを確認しなさい。

練習問題 6

関数

$$y = \sqrt{x+1} + 2$$

について、次を求めなさい。

- (1) $y = 5$ となる x
- (2) $y = 1$ となる x が存在するかどうか

練習問題 7

「すべての実数 x に対して $\sqrt{x^2} = x$ が成り立つ」という主張の正誤を判断しなさい。また、 $x = -2$ の場合で確かめ、正しい式を示しなさい。

練習問題 8

関数

$$y = \sqrt{x-1}$$

を二乗して得られる

$$y^2 = x - 1$$

のグラフを、そのまま関数 $y = \sqrt{x-1}$ のグラフとして使ってよいか答えなさい。点 $(5, -2)$ を使って理由を説明し、必要な符号条件を示しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

(1) 根号内が 0 以上である必要がある。

$$x + 2 \geq 0$$

したがって、定義域は $x \geq -2$ である。

(2) 根号が表す主平方根の値は非負なので、

$$y \geq 0$$

である。また、任意の $y \geq 0$ に対して $x = y^2 - 2$ とすれば、

$$\sqrt{x + 2} = \sqrt{y^2} = y$$

となる。したがって、 $y \geq 0$ のすべての値を実現でき、値域は $y \geq 0$ である。

(3) $x = -2$ は端点の x 座標である。このとき $y = \sqrt{0} = 0$ なので、端点は $(-2, 0)$ である。

練習問題 2 の解答・解説

(1) 根号内の条件より、

$$3 - x \geq 0$$

したがって、定義域は $x \leq 3$ である。

(2) 根号が表す主平方根は非負なので、

$$y \geq 0$$

である。任意の $y \geq 0$ に対して $x = 3 - y^2$ とすると、

$$\sqrt{3 - x} = \sqrt{y^2} = y$$

となる。よって、値域は $y \geq 0$ である。

(3) $x = 3$ は端点の x 座標である。このとき $y = \sqrt{0} = 0$ なので、端点は $(3, 0)$ である。

(4) $y = \sqrt{x}$ では根号内の値が増える方向に進むとグラフは右へ広がる。

一方、 $y = \sqrt{3 - x}$ では x が増えるほど根号内 $3 - x$ は小さくなる。根号内の値を大きくするには x を小さくする必要があるため、グラフは端点から左へ広がる。

練習問題 3 の解答・解説

(1) 根号内の条件より $x - 2 \geq 0$ であるため、定義域は $x \geq 2$ である。

(2) $\sqrt{x - 2}$ は非負なので、 $y \leq 4$ である。任意の $y \leq 4$ に対して $x = 2 + (4 - y)^2$ と取ると $x \geq 2$ であり、

$$\sqrt{x - 2} = \sqrt{(4 - y)^2} = 4 - y$$

となるため、この範囲のすべての値を実現できる。

(3) $x = 2$ は端点の x 座標である。このとき $y = -\sqrt{0} + 4 = 4$ なので、端点は $(2, 4)$ である。

(4) $x - 2$ の -2 は基本形から右へ 2 移動する働きを持つ。根号外の負号は主平方根を求めた後に値を反転する働きを持ち、その後に上へ 4 移動する。

$y = \sqrt{x - 2} + 4$ と比較すると、2 つのグラフは水平線 $y = 4$ に関して反射した関係である。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 根号内の条件より、

$$2x - 4 \geq 0$$

$$2x \geq 4$$

したがって、

$$x \geq 2$$

である。

(2) $\sqrt{2x-4}$ は 0 以上なので、

$$y = \sqrt{2x-4} - 1 \geq -1$$

である。また、任意の $y \geq -1$ に対して $y+1 \geq 0$ であり、

$$2x-4 = (y+1)^2$$

を満たす x を取れる。したがって、値域は $y \geq -1$ である。

(3) $x=2$ は端点の x 座標である。このとき $y = \sqrt{0} - 1 = -1$ なので、端点は $(2, -1)$ である。

(4) $x=4$ を代入する。

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2 \cdot 4 - 4} - 1 \\ &= \sqrt{4} - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

したがって、 $x=4$ のとき $y=1$ である。

練習問題 5 の解答・解説

関数

$$y = \sqrt{x-p} + q$$

では、根号内が 0 になる位置が端点の x 座標になる。端点の座標が $(3, -2)$ なので、

$$x-p=0$$

となる x が 3 である。したがって、

$$3-p=0$$

より、

$$p=3$$

である。また、端点の y 座標は、

$$y=q$$

なので、

$$q=-2$$

である。よって、

$$p=3, \quad q=-2$$

となる。確認すると、

$$y = \sqrt{x-3} - 2$$

であり、 $x=4$ のとき

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4-3} - 2 \\ &= 1 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。したがって、点 $(4, -1)$ を通る。

練習問題 6 の解答・解説

まず、根号内の条件より定義域は $x \geq -1$ である。

(1) $y = 5$ とすると、

$$5 = \sqrt{x+1} + 2$$

より、

$$\sqrt{x+1} = 3$$

となる。両辺が非負であるため、この操作で得られる二乗は同値変形になる。

$$x+1 = 9$$

したがって、 $x = 8$ である。これは定義域内であり、

$$\sqrt{9} + 2 = 5$$

となるため確認できる。

(2) $y = 1$ とすると、

$$\sqrt{x+1} = -1$$

となる。しかし、根号が表す主平方根は必ず非負であるため、この条件を満たす実数 x は存在しない。

練習問題 7 の解答・解説

主張

$$\sqrt{x^2} = x$$

を考える。根号が表す主平方根は非負の値を表すため、右辺 x が負の場合には成り立たない。 $x = -2$ とすると、

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

である。一方、

$$x = -2$$

なので、左辺と右辺は異なる。したがって、主張は誤りである。正しい式は、

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

である。

練習問題 8 の解答・解説

そのまま使うことはできない。関数

$$y = \sqrt{x-1}$$

では、平方根の性質より

$$y \geq 0$$

という条件が必要である。一方、

$$y^2 = x - 1$$

だけでは、 y が正の場合と負の場合の両方を含む。実際、点 $(5, -2)$ を考えると、

$$(-2)^2 = 5 - 1$$

なので、

$$y^2 = x - 1$$

のグラフ上には存在する。しかし、

$$\sqrt{5-1} = 2$$

であり、 $y = -2$ は $y = \sqrt{x-1}$ のグラフ上には存在しない。したがって、 $y^2 = x - 1$ をそのまま使うことはできず、

$$y \geq 0$$

という条件を付けた上側の枝だけを選ぶ必要がある。