

第 27 講 二次関数 $y=ax^2$

学習目標

- 二次関数 $y = ax^2$ の意味を理解し、 x の値から y の値を求められる。
- $y = ax^2$ のグラフが原点を通り、 y 軸について対称になることを説明できる。
- a の正負からグラフの開く向きを判断できる。
- $|a|$ の大きさとグラフの広がり方の関係を判断できる。

x を 2 乗してから定数倍する関数

一次関数とは違う増え方

関数

$$y = ax^2$$

を考えます。ただし、 $a \neq 0$ とします。

この関数では、 x をそのまま定数倍するのではなく、いったん x^2 をつくってから a 倍します。

たとえば $y = 2x^2$ で $x = 3$ なら、 $y = 2 \cdot 3^2 = 18$ です。

x が 2 倍になったから y も 2 倍になる、という関係ではありません。 x^2 が現れることで、一次関数とは異なる変化の仕方をします。

二次関数 $y = ax^2$

$a \neq 0$ を定数とすると、

$$y = ax^2$$

の形で表される関数を二次関数の基本的な形として扱います。

2 乗する範囲に注意する

$y = -2x^2$ で $x = -3$ のときは、

$$y = -2 \cdot (-3)^2 = -18$$

です。

$(-3)^2 = 9$ を計算してから -2 を掛けます。

$-2(-3)^2$ を正の 18 としてしまわないように注意します。

値の表からグラフの形をつかむ

$y = x^2$ の対応を見る

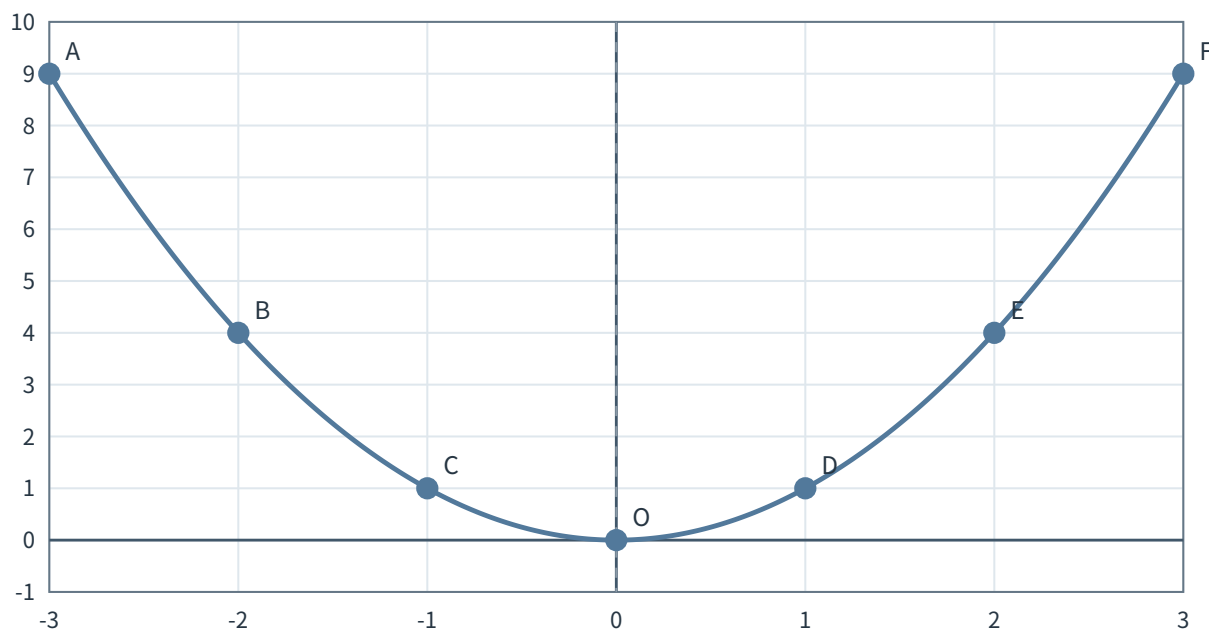
最も基本的な二次関数 $y = x^2$ を考えます。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

$x = 2$ と $x = -2$ では、どちらも $y = 4$ です。

同じように、 $x = 3$ と $x = -3$ でも $y = 9$ になります。

これは正の数と負の数を 2 乗すると、符号が消えて同じ値になるからです。

図1 二次関数 $y = x^2$ のグラフ

$y = x^2$ の基本的な形

$y = x^2$ のグラフには、次の特徴があります。

- 原点 $(0,0)$ を通る。
- x と $-x$ で y の値が等しい。
- y 軸について左右対称である。
- 原点付近で最も低く、左右へ進むほど上へ広がる。

なぜ y 軸について対称になるのか

x と $-x$ を代入して比べる

二次関数 $y = ax^2$ で、 x の代わりに $-x$ を入れてみます。

$$a(-x)^2 = ax^2$$

なので、 x と $-x$ に対する関数の値は等しくなります。

たとえば $x = 2$ の点と $x = -2$ の点は、 y 軸からの距離が同じで、高さも同じです。

したがって、 $y = ax^2$ のグラフは y 軸について対称になります。

左右対称を式から判断する

二次関数 $y = ax^2$ では、

$$f(-x) = f(x)$$

が成り立ちます。

このため、グラフは y 軸について対称です。

a の符号で開く向きが決まる

$a > 0$ のとき

$a > 0$ なら、 $x^2 \geq 0$ なので $ax^2 \geq 0$ です。
したがって、グラフは原点から上方向へ広がります。
たとえば $y = 2x^2$ は上に開くグラフです。

$a < 0$ のとき

$a < 0$ なら、 $x \neq 0$ のとき $ax^2 < 0$ になります。
したがって、グラフは原点から下方向へ広がります。
たとえば $y = -2x^2$ は下に開くグラフです。

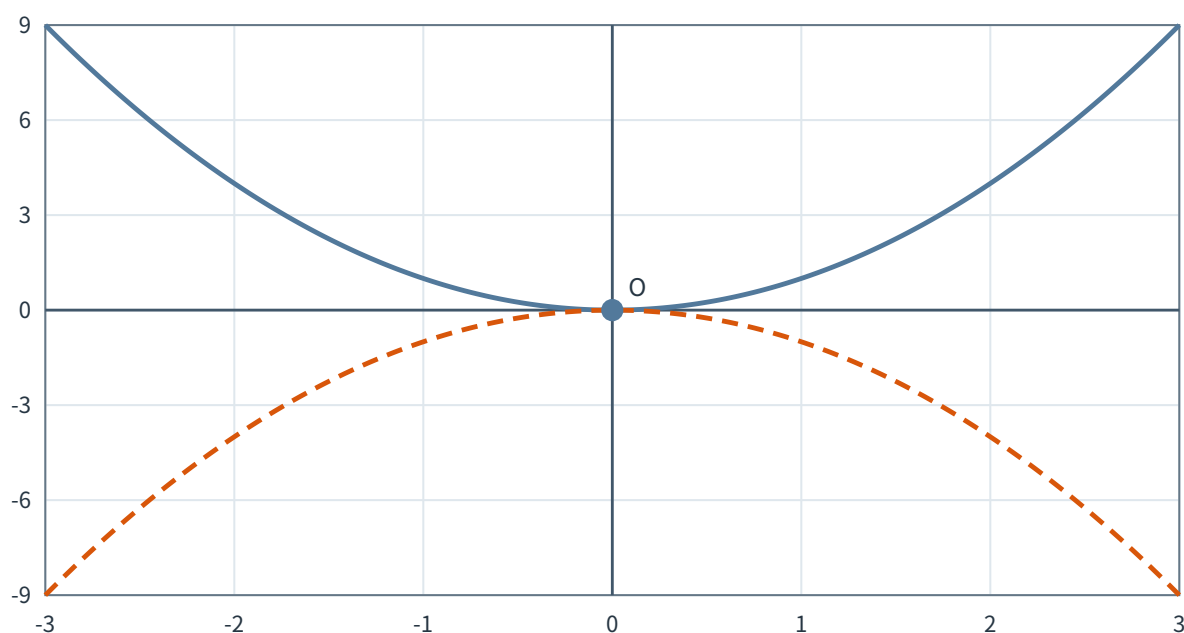


図2 a の正負によるグラフの開く向き

a の符号と開く向き

二次関数 $y = ax^2$ では、

- $a > 0$ なら上に開く。
- $a < 0$ なら下に開く。

どちらの場合も原点を通り、 y 軸について対称です。

$|a|$ の大きさにで広がり方が変わる

同じ x で y の大きさを比べる

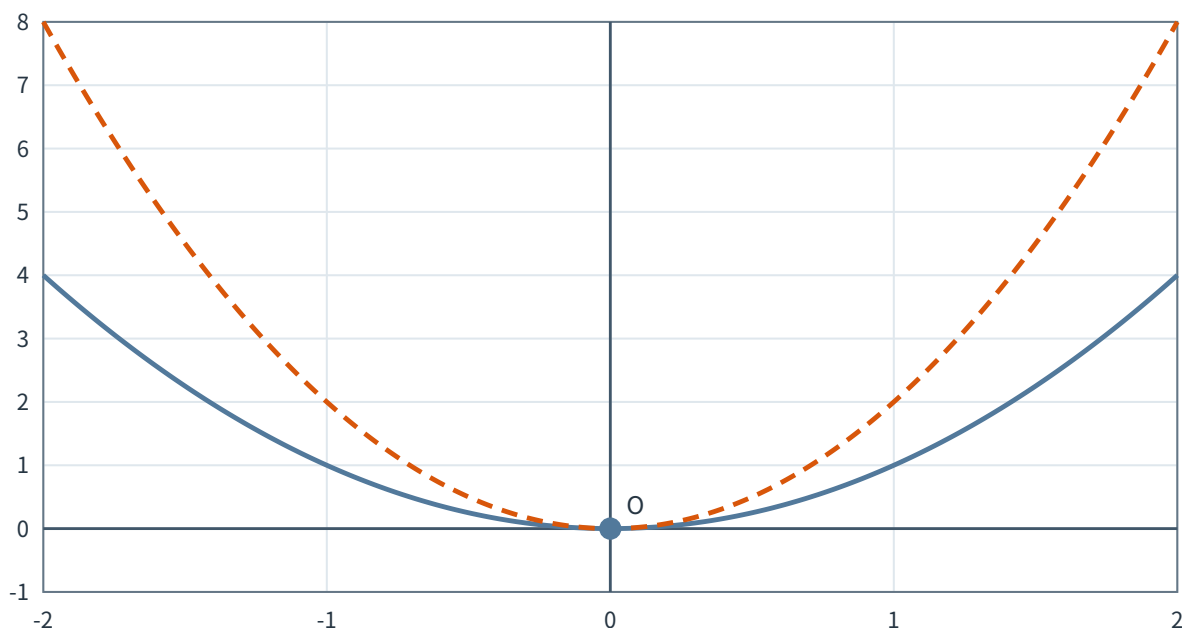
$y = x^2$ と $y = 2x^2$ を比べます。

$x = 1$ のとき、それぞれ $y = 1$ 、 $y = 2$ です。

$x = 2$ のとき、それぞれ $y = 4$ 、 $y = 8$ です。

同じ x に対して、 $|a|$ が大きい方が $|y|$ も大きくなります。

そのため、グラフは y 軸の近くで急に上下する形になり、見た目には細くなります。

図3 $|a|$ が大きいほどグラフは細くなる

$|a|$ とグラフの広がり

a の符号が同じなら、

- $|a|$ が大きいほどグラフは細くなる。
- $|a|$ が小さいほどグラフは広がる。

これは、同じ x に対する $|y| = |a| x^2$ の大きさを比べると理解できます。

a そのものではなく絶対値を比べる

$y = -3x^2$ と $y = -x^2$ の広がり比べるとき、見るのは -3 と -1 の大小ではなく、 $|a|$ です。
 $|-3| > |-1|$ なので、 $y = -3x^2$ の方が細いグラフになります。

グラフをかくときの基本

左右対称を利用して点を取る

$y = ax^2$ のグラフをかくときは、すべての点をばらばらに計算する必要はありません。

まず $x = 0, 1, 2$ など y を求めます。

その後、 x と $-x$ で y が等しいことを利用して、左側の点も取れます。

最後に、原点を通り、 y 軸について対称になるように滑らかに結びます。

$y = ax^2$ のグラフを読む手順

1. a の正負を見て、上向きか下向きか判断する。
2. $|a|$ を見て、広がり方を考える。
3. 原点を通ることを確認する。
4. y 軸について対称であることを利用する。

例題

例題 1

二次関数 $y = 2x^2$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $x = 3$ のときの y の値を求めなさい。
- (2) $x = -2$ のときの y の値を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

- (1) $x = 3$ を代入すると、 $y = 2 \cdot 3^2 = 18$ です。
 - (2) $x = -2$ を代入すると、 $y = 2 \cdot (-2)^2 = 8$ です。
- したがって、答えは順に 18, 8 です。

例題 2

二次関数 $y = -3x^2$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) グラフは上と下のどちらに開くか答えなさい。
- (2) $x = 1$ のときの y の値を求めなさい。
- (3) $x = -1$ のときの y の値を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

- (1) $a = -3 < 0$ なので、グラフは下に開きます。
 - (2) $x = 1$ のとき、 $y = -3$ です。
 - (3) $x = -1$ のときも、 $y = -3$ です。
- $x = 1$ と $x = -1$ で値が等しいことから、 y 軸について対称であることが確認できます。

例題 3

次の 3 つの二次関数を、グラフが細いものから順に並べなさい。

$$y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 3x^2, \quad y = x^2$$

例題 3 の解答・解説

グラフの広がりや細さは $|a|$ で比べます。
係数の絶対値は、それぞれ $\frac{1}{2}, 3, 1$ です。
 $|a|$ が大きいほどグラフは細くなります。
したがって、細いものから順に $y = 3x^2$ 、 $y = x^2$ 、 $y = \frac{1}{2}x^2$ です。

演習問題

練習問題 1

二次関数 $y = x^2$ について、次の値を求めなさい。

- (1) $x = 4$ のときの y
- (2) $x = -3$ のときの y
- (3) $x = 0$ のときの y

練習問題 2

二次関数 $y = -2x^2$ について、次の値を求めなさい。

- (1) $x = 2$ のときの y
- (2) $x = -2$ のときの y
- (3) $x = \frac{1}{2}$ のときの y

練習問題 3

次の二次関数について、グラフが上に開くか下に開くか答えなさい。

- (1) $y = 5x^2$
- (2) $y = -x^2$
- (3) $y = -\frac{1}{3}x^2$

練習問題 4

次の二次関数を、グラフが細いものから順に並べなさい。

$$y = 4x^2, \quad y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 2x^2$$

練習問題 5

二次関数 $y = ax^2$ のグラフが点 $(2, 12)$ を通る。

a の値を求めなさい。

練習問題 6

二次関数 $y = ax^2$ のグラフが点 $(-3, -18)$ を通る。

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) このグラフは上と下のどちらに開くか答えなさい。

練習問題 7

二次関数 $y = 3x^2$ のグラフ上に点 $P(2, a)$ がある。

また、このグラフ上で x 座標が -2 である点を Q とする。

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 点 Q の座標を求めなさい。
- (3) 点 P と点 Q の位置関係を、グラフの対称性に触れて説明しなさい。

練習問題 8

ある生徒は、 $y = -2x^2$ について「 $-2 < -1$ なので、 $y = -2x^2$ は $y = -x^2$ より広いグラフになる」と考えました。

この考えが誤っている理由を説明し、どちらのグラフが細いか答えなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

- (1) $x = 4$ のとき、 $y = 4^2 = 16$ です。
 - (2) $x = -3$ のとき、 $y = (-3)^2 = 9$ です。
 - (3) $x = 0$ のとき、 $y = 0$ です。
- したがって、答えは順に 16, 9, 0 です。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) $x = 2$ のとき、 $y = -2 \cdot 2^2 = -8$ です。
- (2) $x = -2$ のときも、 $y = -2 \cdot (-2)^2 = -8$ です。
- (3) $x = \frac{1}{2}$ のとき、 $y = -2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$ です。

練習問題 3 の解答・解説

- (1) $a = 5 > 0$ なので、上に開きます。
- (2) $a = -1 < 0$ なので、下に開きます。
- (3) $a = -\frac{1}{3} < 0$ なので、下に開きます。

練習問題 4 の解答・解説

係数の絶対値を比べると、 $4 > 2 > \frac{1}{4}$ です。

$|a|$ が大きいほどグラフは細くなります。

したがって、細いものから順に $y = 4x^2$ 、 $y = 2x^2$ 、 $y = \frac{1}{4}x^2$ です。

練習問題 5 の解答・解説

点 $(2, 12)$ がグラフ上にあるので、 $x = 2$ 、 $y = 12$ を $y = ax^2$ に代入します。
 $12 = 4a$ なので、 $a = 3$ です。

練習問題 6 の解答・解説

- (1) 点 $(-3, -18)$ を $y = ax^2$ に代入すると、 $-18 = 9a$ です。
したがって、 $a = -2$ です。
- (2) $a < 0$ なので、グラフは下に開きます。

練習問題 7 の解答・解説

- (1) $x = 2$ を代入すると、 $a = 3 \cdot 2^2 = 12$ です。
(2) $x = -2$ のときも $y = 3 \cdot (-2)^2 = 12$ なので、 $Q = (-2, 12)$ です。
(3) $P = (2, 12)$ 、 $Q = (-2, 12)$ です。
2 点は y 座標が等しく、 x 座標が正負反対なので、 y 軸について対称な位置にあります。

練習問題 8 の解答・解説

グラフの広がり比べるときは、係数 a そのものの大小ではなく $|a|$ を比べます。
 $|-2| = 2$ 、 $|-1| = 1$ なので、 $y = -2x^2$ の方が同じ x に対する $|y|$ が大きくなります。
したがって、 $y = -2x^2$ の方が $y = -x^2$ より細いグラフです。