

第 145 講 いろいろな数列の和

学習目標

- 数列の和を、既知の和や相殺できる形へ変形できる。
- 被加数の形に応じて、適切な式変形の方法を選べる。
- 等差数列と等比数列が組み合わさった和を整理できる。

いろいろな和を変形して考える

この講で文字 n を上端として使うときは n を正整数とし、添字は指定された整数範囲で動かす。数列の和では、見た目が新しい形でも、すでに知っている和へ変形できる場合が多い。

第 143 講で扱った和の記号の性質や、第 144 講で扱った自然数の和・平方の和は、複雑な和を分解するときの土台になる。

例えば、各項が式になっている場合は、項を分けて考える。

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + 3k)$$

では、各項を分けることで、

$$\sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k$$

となる。

このように、元の項と変形後の項が同じ値を表していることを確認しながら、知っている和へ近づけることが重要である。

分数の和で使う恒等式

分母が 0 でない範囲では、次のような分解を利用できる。

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

実際に通分すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

となり、恒等式であることが分かる。

ここでは $k \neq 0, -1$ が必要である。自然数 k を扱う場合、この条件は満たされる。

基本の手順

見慣れない有限和を見たら、次の順で考える。

1. 被加数を展開し、既知の和に分けられないかを見る。
2. 分数の形なら、項同士が打ち消し合う形へ変形できないかを見る。
3. 等差数列と等比数列が組み合わさる場合は、等比部分の公比を利用して差を取る方法を考える。この講の例では公比が 2 なので、和を 2 倍してから元の和との差を考える。公比が 1 の場合は、多項式や等差数列の和など、既知の和へ帰着する。

大切なのは、公式をそのまま当てはめることなく、和の中の構造を見つけることである。

分数の和が相殺する仕組み

例えば、

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}$$

を考える。

分数分解すると、

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ & + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

となる。

隣り合う項が逆符号で現れるため、

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ & = 1 - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。

途中の項はすべて消え、最初の項と最後に残った項だけで結果が決まる。このような形を相殺する形という。

例題 1

次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^5 (k^2 + 2k)$$

例題 1 の解答

被加数を分けると、平方の和と自然数の和になる。

$$\sum_{k=1}^5 (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^5 k^2 + 2 \sum_{k=1}^5 k$$

自然数の和と平方の和を使う。

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

それぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} &= 55 + 2 \cdot 15 \\ &= 85 \end{aligned}$$

したがって、求める和は 85 である。

元の各項を分けただけなので、式の値は変化していない。

例題 2

次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)}$$

例題 2 の解答

分数を相殺する形へ変形する。

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

途中の項は消える。

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

したがって、求める和は $\frac{4}{5}$ である。

例題 3

次の和を求めよ。

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4$$

例題 3 の解答

等差数列の係数と等比数列が組み合わさった形である。

求める和を S とおく。

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4$$

等比部分の公比が 2 なので、 S を 2 倍する。

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5$$

ここで $2S - S$ を考える。

$$\begin{aligned} 2S - S &= (1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5) \\ &\quad - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4) \end{aligned}$$

同じべきの項をまとめる。

$$\begin{aligned} S &= -2 + (1 - 2)2^2 + (2 - 3)2^3 \\ &\quad + (3 - 4)2^4 + 4 \cdot 2^5 \\ &= -2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 + 4 \cdot 2^5 \end{aligned}$$

数値を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= -2 - 4 - 8 - 16 + 128 \\ &= 98 \end{aligned}$$

したがって、求める和は 98 である。

直接計算しても、 $2 + 8 + 24 + 64 = 98$ となり一致する。

この方法では、等比部分の公比を利用して項の位置をずらし、引き算によって中間の項を整理している。

演習問題**練習問題 1**

次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^5 (k^2 + 3k)$$

練習問題 2

次の和を求めよ。

$$\sum_{k=2}^5 \frac{1}{k(k+1)}$$

練習問題 3

次の和を求めよ。

$$3 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)}$$

練習問題 4

次の和を求めよ。

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3$$

練習問題 5

次の和を求めよ。

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3$$

練習問題 6

次の式について、誤りを指摘し、正しい値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

練習問題 7

次の和を、被加数を展開して既知の和へ分ける方法で求めよ。

$$\sum_{k=2}^4 (k+1)^2$$

練習問題 8

n を正整数とする。次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

練習問題 1 の解答・解説

被加数を分けて、自然数の和と平方の和に分ける。

$$\sum_{k=1}^5 (k^2 + 3k) = \sum_{k=1}^5 k^2 + 3 \sum_{k=1}^5 k$$

それぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} &= (1 + 4 + 9 + 16 + 25) + 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ &= 55 + 45 \\ &= 100 \end{aligned}$$

したがって、求める和は 100 である。

練習問題 2 の解答・解説

分母の形から、相殺する形へ変形する。

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^5 \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

途中の項が消える。

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

したがって、求める和は $\frac{1}{3}$ である。

練習問題 3 の解答・解説

まず分数の和を求める。

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

より、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)} &= 1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

したがって、

$$3 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)} = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

求める和を S とおく。

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3$$

等比部分の公比が 2 なので、 S を 2 倍する。

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4$$

差を取る。

$$\begin{aligned}2S - S &= (1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4) \\ &\quad - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3)\end{aligned}$$

同じべきの項をまとめると、係数の差は

$$\begin{aligned}S &= (1 - 2)2^2 + (2 - 3)2^3 + 3 \cdot 2^4 - 2 \\ &= -2 - 2^2 - 2^3 + 3 \cdot 2^4 \\ &= -2 - 4 - 8 + 48 \\ &= 34\end{aligned}$$

したがって、求める和は 34 である。

直接計算しても、 $2 + 8 + 24 = 34$ となり一致する。

練習問題 5 の解答・解説

求める和を S とおく。

$$S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3$$

等比部分の公比が 3 なので、 S を 3 倍する。

$$3S = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4$$

差を取る。

$$\begin{aligned} 3S - S &= (1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4) \\ &\quad - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3) \end{aligned}$$

まとめると、

$$\begin{aligned} 2S &= -3 - 3^2 - 3^3 + 3 \cdot 3^4 \\ &= -3 - 9 - 27 + 243 \\ &= 204 \end{aligned}$$

したがって、 $S = 102$ である。

直接計算しても、 $3 + 18 + 81 = 102$ となる。

練習問題 6 の解答・解説

与えられた式では、分数分解の符号が逆になっている。

正しい恒等式は、

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

である。

実際、

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

となる。

一方、

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = -\frac{1}{k(k+1)}$$

なので、元の式は正しくない。

正しい形で計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)} &= 1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

したがって、正しい値は $\frac{4}{5}$ である。

練習問題 7 の解答・解説

被加数を展開する。

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

したがって、

$$\sum_{k=2}^4 (k+1)^2 = \sum_{k=2}^4 k^2 + 2 \sum_{k=2}^4 k + \sum_{k=2}^4 1$$

それぞれの和を求める。

$$\sum_{k=2}^4 k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$$

$$2 \sum_{k=2}^4 k = 2(2 + 3 + 4) = 18$$

また、 $k = 2, 3, 4$ の 3 項なので、

$$\sum_{k=2}^4 1 = 3$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^4 (k+1)^2 &= 29 + 18 + 3 \\ &= 50 \end{aligned}$$

となる。

上端の 4 は項数ではなく、添字 k が動く最後の値である。したがって、定数 1 の和の項数は $4 - 2 + 1 = 3$ 個になる。

直接計算しても、 $3^2 + 4^2 + 5^2 = 9 + 16 + 25 = 50$ となり一致する。

練習問題 8 の解答・解説

分数分解を利用する。

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

よって、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$n \geq 2$ のとき、 $2 \leq j \leq n$ を満たす各整数 j について、 $k = j - 1$ の項から $-\frac{1}{j}$ が、 $k = j$ の項から $+\frac{1}{j}$ が現れる。したがって、これらは対になって相殺する。

残るのは $k = 1$ の項の正の部分 1 と、 $k = n$ の項の負の部分 $-\frac{1}{n+1}$ である。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$n = 1$ の場合は中間項がなく、

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

である。

また、

$$1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となり、同じ公式が成り立つ。

したがって、正整数 n に対して、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

である。