第 037 講 円運動の速さと周期

この講でできるようになること

- 円運動の速さを、円周の長さと 1 周にかかる時間から求めることができる。
- 周期、毎秒の回転数、総回転数の違いを説明し、単位を正しく換算できる。
- 度とラジアンを対応させ、中心角から円弧の長さを求めることができる。
- 角速度と速さの関係を説明し、半径や回転の速さが変わる場合を比較できる。
- 円周に沿った道のりと変位を区別し、等速という条件の必要性を判断できる。

1. 円運動では何が変わるのか

時計の針の先端や回転する円盤上の点は、円を描くように動く。このように、物体が円周に沿って動く運動を**円運動**という。

円運動では、物体が進む道筋は直線ではなく曲線になる。そのため、速さを考えるときは、出発点から到着点までの直線距離ではなく、実際に円周に沿って進んだ道のりを使う。

本講では、半径が一定の円周上を、一定の向きに回り続ける物体を考える。特に、**速さが一定の円運動**を等速円運動という。

速さが一定でも速度は一定ではない

速さは、単位時間に進む道のりの大きさを表す。一方、速度は速さだけでなく運動の向きも含む量である。

円周上を動く物体の速度は、その位置での円周の接線方向を向く。等速円運動では速さが一定でも、進行方向は位置とともに変わるため、速度は一定ではない。

本講では、運動の向きを問題ごとに指定し、主に速さと角度の進み方の大きさを扱う。

円周の長さと進む道のり

半径を r とすると、円周の長さ L は

$$L = 2\pi r$$

である。半径 r と円周の長さ L は、ともに長さの量であり、単位には m などを使う。

例えば、半径 2 m の円の円周は

$$L = 2\pi \times 2\,\mathrm{m} = 4\pi\,\mathrm{m}$$

となる。

この円を 1 周すれば、進んだ道のりは 4π m である。同じ向きに 2 周すれば 8π m、半周なら 2π m となる。

ここで重要なのは、**円周上のどこに到着したかだけでは、進んだ道のりが決まらない**ことである。1 周して出発点に戻った場合も、道のりは円周 1 周分だけ増えている。

2. 周期と回転数

円運動の速さを表すには、どれだけの距離を進むかに加えて、どれだけの時間がかかるかを知る必要がある。

周期 T

周期

周期 T は、円を 1 周するのにかかる時間である。
単位は秒（s）を使う。

例えば、一定の速さで 1 周するのに 8 s かかるなら、周期は

$$T = 8\,\mathrm{s}$$

である。
同じ速さで回り続ける場合、次の 1 周にも同じ時間がかかる。
周期が小さいほど短い時間で 1 周するため、同じ円なら円周に沿った速さは大きくなる。

毎秒の回転数 f

周期は「1 周に何秒かかるか」を表す。これに対して、「1 秒間に何周するか」という見方もできる。
1 秒間当たりの回転数を f と書く。単位は s^{-1} であり、ヘルツ（Hz）とも表す。

$$1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$$

一定の速さで回るとき、1 周に T 秒かかるので、1 秒間当たりの回転数は

$$f = \frac{1}{T}$$

となる。
例えば、周期が 4 s なら

$$f = \frac{1}{4\,\mathrm{s}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Hz}$$

である。これは、1 秒当たりに円周の $\frac{1}{4}$ 周分だけ進むことを意味する。
逆に、毎秒の回転数 f が分かれば、周期は

$$T = \frac{1}{f}$$

で求められる。

周期と毎秒の回転数は逆数の関係

周期 T の単位は s、毎秒の回転数 f の単位は Hz である。

- 周期が大きいほど、1 秒間に回る回数は少ない。
- 周期が小さいほど、1 秒間に回る回数は多い。

同じ回転を「1 周にかかる時間」と「1 秒当たりの回転数」という異なる量で表しているため、T と f を取り違えないことが重要である。

総回転数 N

回り始めてから何周したかを表す量を、総回転数 N とする。単位は「回」であり、1.5 回転のように整数以外でも表せる。

毎秒 f 回転する物体が、その速さを保って t 秒間回ったとき、総回転数は

$$N = ft$$

である。

例えば、$f = 2\,\mathrm{Hz}$ の物体が $3\,\mathrm{s}$ 間回ると、

$$N = 2\,\mathrm{s}^{-1} \times 3\,\mathrm{s} = 6\,\text{回}$$

となる。

f は「1 秒当たりの回転数」、N は「ある時間に回った合計の回転数」であり、同じものではない。

rpm と Hz の違い

回転する機械の表示には、rpm という単位が使われることがある。

rpm は revolutions per minute の略で、**1 分間当たりの回転数**を表す。

1 分は $60\,\mathrm{s}$ なので、

$$60\,\mathrm{rpm} = 1\,\mathrm{Hz}$$

である。

したがって、

$$f\ \ [\mathrm{Hz}] = \frac{1\,\text{分間当たりの回転数}\ [\mathrm{rpm}]}{60}$$

と換算できる。

例えば、$120\,\mathrm{rpm}$ は 1 分間に 120 回転することを意味するため、

$$f = \frac{120\,\text{回}}{60\,\mathrm{s}} = 2\,\mathrm{Hz}$$

となる。

$120\,\mathrm{rpm}$ と $120\,\mathrm{Hz}$ は同じ回転の速さを意味しない。

3. 円周に沿った角度をラジアンで表す

円運動では、進んだ道のりのほかに、円の中心から見てどれだけ角度が進んだかを考えると便利である。

円の中心を O、物体の出発点を A、到着点を B とする。中心から物体へ引いた半径 OA が、指定された回転方向に OB まで回ったとき、その角度を考える。

弧と弦の違い

円周上の A から B までの、曲がった円周の部分を**弧**という。

一方、A と B を直接結ぶ直線部分を**弦**という。

物体が円周上を移動する場合、進んだ道のりは弧の長さであり、弦の長さではない。弦は、始点と終点を直接結んだ直線距離を考えるときに使う。

同じ 2 点を結んでいても、弧と弦では長さが異なる。

ラジアンの意味

角度を表す単位には、度（°）のほかに、ラジアン（rad）がある。

半径 r の円で、ある中心角に対応する弧の長さを s とする。このとき、弧の長さと半径の比を使って角度を表すのがラジアンである。

ラジアン

中心角を θ とすると、ラジアンで表した角度の数値は

$$\theta = \frac{s}{r}$$

で定められる。

r と s は同じ長さの単位で表す。

特に、弧の長さ s が半径 r と等しくなる中心角が 1 rad である。

ラジアンは長さと長さの比から決まるため、その数値自体には長さの単位が残らない。ただし、角度であることを明確にするため、単位 rad を付けて表す。

1 rad は約 57.3° に相当し、1° とは異なる。

1 周の角度

円を 1 周すると、弧の長さは円周の長さ $2\pi r$ に等しい。

したがって、1 周の角度は

$$\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \,\mathrm{rad}$$

となる。

度とラジアンの対応は次のとおりである。

円の進み方	度	ラジアン
1 周	360°	2π rad
半周	180°	π rad
4 分の 1 周	90°	$\frac{\pi}{2}$ rad
6 分の 1 周	60°	$\frac{\pi}{3}$ rad

度からラジアンへ換算する場合は

$$\theta \ \ [\mathrm{rad}] = \text{角度}\ [\text{度}] \times \frac{\pi}{180}$$

を使う。

例えば、

$$120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad}$$

である。

角度と弧の長さ

ラジアンの定義を変形すると、弧の長さは

$$s = r\theta$$

で求められる。

この式では、θ に**ラジアンで表した角度の数値**を代入する。

例えば、半径 2 m の円で $\frac{\pi}{2}$ rad だけ進むと、

$$s = 2\,\mathrm{m} \times \frac{\pi}{2} = \pi\,\mathrm{m}$$

となる。

90° という数値をそのまま $\theta = 90$ として代入すると、正しい弧の長さにならない。

角度を数える向きと累積角度

円運動では、最初の半径の向きを基準に、指定された回転方向へどれだけ進んだかを角度で数える。

この講では、時計回りまたは反時計回りのどちらかをあらかじめ指定し、その方向へ進んだ角度の大きさを正の値で表す。

1 周すると 2π rad、2 周すると 4π rad 進む。これらは最終的に同じ位置へ戻るが、進んだ角度の合計は異なる。

最終位置を表す角度と**移動中に進んだ角度の合計（累積角度）**を区別することが大切である。

4. 角速度と円周上の速さ

円運動の進み方は、円周に沿った長さだけでなく、単位時間に進む角度でも表せる。

角速度 ω

角度の進み方を時間で割った量を角速度という。角速度はギリシャ文字の ω（オメガ）で表す。

角速度

一定の向きに角度 θ だけ進むのに時間 t がかかったとき、その区間での平均の角度の進み方の大きさは

$$\frac{\theta}{t}$$

である。

特に、等速円運動では角度も一定の割合で進むため、この値は常に同じになり、その一定値を ω とする。

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

角速度の単位は rad/s である。

ここでの ω は、指定した回転方向における角速度の大きさを表す。角速度と、円周に沿って進む速さ v は異なる物理量である。

角速度は 1 秒当たりに進む角度、速さは 1 秒当たりに進む道のりを表す。

周期と角速度の関係

円を 1 周すると、角度は 2π rad 進む。

1 周にかかる時間が周期 T なので、等速円運動の角速度は

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

である。

また、$f = \frac{1}{T}$ だから、

$$\omega = 2\pi f$$

とも表せる。

例えば、周期が 4 s の等速円運動なら、

$$\omega = \frac{2\pi}{4\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$$

となる。

これは、指定された回転方向へ 1 秒間に $\frac{\pi}{2}$ rad、つまり 90° 進むことを意味する。

角速度が一定の場合、時間 t の間に進む累積角度は

$$\theta = \omega t$$

で求められる。

角速度から円周上の速さを求める

等速円運動で、物体が時間 t の間に進んだ弧の長さを s とする。

ラジアンの関係から

$$s = r\theta$$

である。

これを経過時間 t で割ると、円周に沿った速さ v は

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} \\ &= \frac{r\theta}{t} \\ &= r\frac{\theta}{t} \end{aligned}$$

となる。

等速円運動では $\frac{\theta}{t} = \omega$ なので、

$$v = r\omega$$

を得る。

同じ角速度でも半径によって速さが変わる

$v = r\omega$ は、円周に沿った速さと角速度の対応を表す。

同じ角速度で回る 2 つの点を比べると、半径が大きい点ほど 1 秒間に長い弧を進むため、速さが大きくなる。

角速度が同じだから速さも同じ、とは限らない。

周期から速さを直接求める

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ を $v = r\omega$ に代入すると、

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

となる。

これは、1 周分の道のり $2\pi r$ を、1 周にかかる時間 T で割った式である。

また、$f = \frac{1}{T}$ より、

$$v = 2\pi r f$$

とも書ける。

これらは等速円運動で成り立つ関係である。

物理量	記号	意味	単位
半径	r	円の中心から円周までの距離	m
周期	T	1 周にかかる時間	s
毎秒の回転数	f	1 秒間当たりの回転数	Hz
総回転数	N	ある時間に回った合計	回
累積角度	θ	指定方向に進んだ角度の合計	rad
角速度	ω	1 秒当たりの角度の進み	rad/s
速さ	v	1 秒当たりの道のり	m/s

式を選ぶときは、求めたい量と分かっている量を先に確認する。例えば、周期と半径が分かっていれば $v = \frac{2\pi r}{T}$、角速度と半径が分かっていれば $v = r\omega$ が直接使える。

©ミライコーチング

5. 例題で関係を確かめる

例題 1

半径 $r = 2\,\mathrm{m}$ の円周上を、物体が周期 $T = 8\,\mathrm{s}$ で反時計回りに等速円運動している。
物体は円の右端 A を出発し、$2\,\mathrm{s}$ 後に円の上端 B に到達する。図の O は円の中心である。

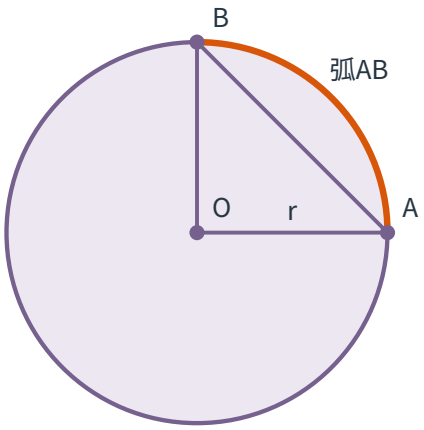

図 1　半径 2m。A から B へ反時計回りに 90 度進む。直線 AB が弦。道のりは短い弧 AB。

(1) 毎秒の回転数 f を求めよ。

(2) 角速度 ω と円周上の速さ v を求めよ。

(3) A から B までに進んだ角度をラジアンで表し、その間に進んだ弧の長さを求めよ。

(4) 直線 AB の長さを求め、(3)の弧の長さと何が違うのか説明せよ。

解答・解説

(1) 毎秒の回転数

周期は 1 周にかかる時間である。したがって、

$$f = \frac{1}{8\,\mathrm{s}} = \frac{1}{8}\,\mathrm{Hz}$$

となる。

答え： $\frac{1}{8}\,\mathrm{Hz}$

(2) 角速度と速さ

1 周は $2\pi\,\mathrm{rad}$ なので、

$$\omega = \frac{2\pi}{8\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad/s}$$

である。

速さは $v = r\omega$ から

$$v = 2\,\mathrm{m} \times \frac{\pi}{4}\,\mathrm{s^{-1}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$$

となる。

答え：$\omega = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad/s}$、$v = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$

(3) 進んだ角度と弧の長さ

角速度が一定なので、$2\,\mathrm{s}$ 間に進む角度は

$$\begin{aligned}\theta &= \omega t \\ &= \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad/s} \times 2\,\mathrm{s} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

となる。

これは 90° に相当し、図の A から B までの反時計回りの 4 分の 1 周と一致する。

進んだ弧の長さは

$$s = 2\,\mathrm{m} \times \frac{\pi}{2} = \pi\,\mathrm{m}$$

である。

答え：角度 $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$、弧の長さ $\pi\,\mathrm{m}$

(4) 弦の長さと弧の長さの違い

半径 OA と OB はともに $2\,\mathrm{m}$ で、直角をなす。

したがって、三平方の定理から

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(2\,\mathrm{m})^2 + (2\,\mathrm{m})^2} \\ &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

となる。

弦 AB は始点と終点を直接結ぶ直線であり、その長さは $2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$ である。一方、円周に沿って移動した道のりは曲がった弧の長さ $\pi\,\mathrm{m}$ である。

答え：弦の長さは $2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$。弧は実際に進んだ円周上の道のり、弦は始点と終点を直接結ぶ直線である。

例題 2

半径 2 m の円周上を、物体が周期 6 s で反時計回りに等速円運動している。

物体は円の右端 A から出発し、2 s 後に左上の点 B に到達する。

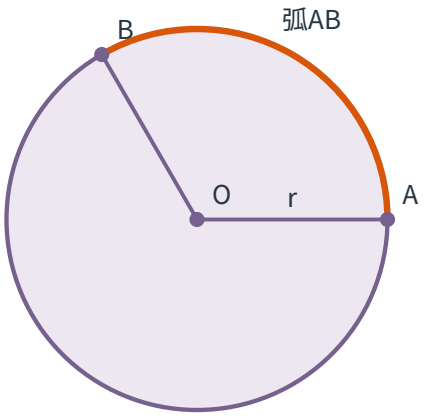

図 2　半径 2m。A から B へ反時計回りに 120 度進む。角度を rad へ直して弧長を求める。

(1) 角速度 ω を求めよ。

(2) 2 s 間に進んだ角度をラジアンで表し、度で表した値と対応することを確かめよ。

(3) A から B までの弧の長さと、物体の速さを求めよ。

解答・解説

(1) 角速度

周期が 6 s なので、

$$\omega = \frac{2\pi}{6\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad/s}$$

である。

答え： $\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad/s}$

(2) 進んだ角度

等速円運動なので、

$$\begin{aligned}\theta &= \omega t \\ &= \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad/s} \times 2\,\mathrm{s} \\ &= \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

となる。

度に換算すると、

$$\frac{2\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

である。これは図に示した中心角と一致する。

答え： $\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad} = 120^\circ$

(3) 弧の長さと速さ

弧の長さは

$$s = 2\,\mathrm{m} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{m}$$

である。

この弧を 2 s で進むので、速さは

$$\begin{aligned}v &= \frac{s}{t} \\ &= \frac{\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となる。

$v = r\omega$ を使っても同じ結果になる。

答え：弧の長さ $\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{m}$**、速さ** $\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{m/s}$

角度を 120° の数値のまま $s = r\theta$ に代入してはいけない。ラジアンに直してから弧の長さを求める必要がある。

例題 3

半径 0.30 m の円周上を、物体が一定の向きに 120 rpm で等速円運動している。

(1) 毎秒の回転数 f を Hz で表せ。

(2) 周期 T を求めよ。

(3) 角速度 ω を求めよ。

(4) 円周上の速さ v を求めよ。

解答・解説

(1) 毎秒の回転数

120 rpm は 1 分間に 120 回転するという意味である。

1 分は 60 s なので、

$$f = \frac{120\,\text{回}}{60\,\text{s}} = 2\,\text{Hz}$$

となる。

答え：2 Hz

(2) 周期

毎秒 2 回転するので、1 周にかかる時間は

$$T = \frac{1}{2\,\text{s}^{-1}} = 0.50\,\text{s}$$

である。

答え：0.50 s

(3) 角速度

1 周で 2π rad 進むので、

$$\omega = 2\pi \times 2\,\text{s}^{-1} = 4\pi\,\text{rad/s}$$

となる。

答え：4π rad/s

(4) 円周上の速さ

$v = r\omega$ より、

$$v = 0.30\,\text{m} \times 4\pi\,\text{s}^{-1} = 1.2\pi\,\text{m/s}$$

である。

答え：$1.2\pi\ \mathrm{m/s}$

rpm を Hz へ換算するときは、60 で割ることが重要である。120 rpm を 120 Hz として計算すると、角速度と速さが実際の 60 倍になってしまう。

6. 同じ位置に戻っても道のりは残る

円運動では、出発した場所に戻ったときの扱いにも注意が必要である。

道のりと変位

道のりは、実際に通った経路の長さである。

一方、変位は、始点から終点への位置の変化を表す向きのある量である。

円をちょうど 1 周すると、道のりは円周 1 周分だけ増えるが、始点と終点が一致するので変位は 0 になる。

この区別は、平均の速さと平均速度にも関係する。

時間区間全体の平均の速さは

$$\text{平均の速さ} = \frac{\text{道のり}}{\text{経過時間}}$$

である。

一方、平均速度は

$$\text{平均速度} = \frac{\text{変位}}{\text{経過時間}}$$

で求める向きのある量である。

1 周した場合

半径 r の円を周期 T で 1 周したとする。

道のりは $2\pi r$、変位は 0 なので、

$$\text{平均の速さ} = \frac{2\pi r}{T}$$

であるのに対し、平均速度は 0 となる。

平均速度が 0 だからといって、運動中ずっと止まっていたことにはならない。

累積角度と最終位置

同じ位置に戻る円運動でも、何周したかによって累積角度は異なる。

進んだ総回転数	累積角度	最終位置
1 回	$2\pi\ \mathrm{rad}$	出発点
2 回	$4\pi\ \mathrm{rad}$	出発点
3 回	$6\pi\ \mathrm{rad}$	出発点
12 回	$24\pi\ \mathrm{rad}$	出発点

最終位置が同じという情報だけから、何周したかや道のりを判断することはできない。

©ミライコーチング

7. 等速という条件が必要な理由

ここまでの計算では、物体が一定の速さで回っていることを条件としていた。

ところが、円を 1 周するのにかかった時間が分かっても、途中で速くなったり遅くなったりしていれば、各瞬間の速さまでは決められない。

例えば、半径 1 m の円を、途中で逆戻りせず、4 秒間でちょうど 1 周したとする。

道のりは

$$s = 2\pi \times 1\,\mathrm{m} = 2\pi\,\mathrm{m}$$

なので、4 秒間の平均の速さは

$$\frac{2\pi\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$$

と求められる。

しかし、途中で速く進む区間と遅く進む区間があっても、合計 4 秒間で 1 周することは可能である。

したがって、「どの瞬間も速さが $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$ である」と結論するには、等速円運動という追加条件が必要である。

平均と瞬間の値を区別する

円の半径、進んだ道のり、経過時間が分かれば、区間全体の平均の速さを求められる。

一方、その区間の途中の瞬間の速さを同じ値とするには、速さが一定であることを確かめなければならない。

$v = r\omega$ に一定の角速度を代入して円周上の速さを求めるときも、等速の条件を確認することが重要である。

演習問題

演習 1

半径 0.50 m の円周上を、物体が一定の向きに、回転数（周波数）3 Hz で等速円運動している。

演習 1(1) 周期 T を求めよ。

演習 1(2) 角速度 ω を求めよ。

演習 1(3) 円周上の速さ v を求めよ。

演習 1(4) 4 s 間に進んだ総回転数 N と累積角度 θ を求めよ。

演習 1(5) 4 s 間に進んだ道のりを求めよ。また、その間の変位が 0 となる理由を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 1 の解答・解説」

©ミライコーチング

演習 2

半径 0.80 m の円周上を、物体が一定の向きに等速円運動している。

ある時点から 0.30 s 間で、物体が円周に沿って進んだ弧の長さは 1.20 m であった。この間、物体は逆戻りしない。

演習 2(1) この間に進んだ角度 θ をラジアンで求めよ。

演習 2(2) 角速度 ω を求めよ。

演習 2(3) 円周上の速さ v を求めよ。

演習 2(4) 周期 T を求めよ。

対応解説：巻末の「演習 2 の解答・解説」

演習 3

2 つの物体 A、B が、それぞれ一定の向きに等速円運動している。

最初に、A と B の角速度の大きさがどちらも 2 rad/s で、半径が次のように異なる場合を考える。

物体	半径	角速度
A	0.50 m	2 rad/s
B	1.50 m	2 rad/s

演習 3(1) A、B それぞれの速さを求めよ。

演習 3(2) A、B それぞれの周期を求めよ。

演習 3(3) 「角速度が同じなら円周上の速さも同じ」という考えが正しいか、理由とともに説明せよ。

次に、別の 2 つの物体 C、D が、どちらも 2 m/s の一定の速さで円運動している場合を考える。

物体	半径	速さ
C	1.0 m	2 m/s
D	2.0 m	2 m/s

演習 3(4) C、D それぞれの角速度の大きさを求めよ。

演習 3(5) C、D それぞれの周期を求め、半径と周期の関係を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 3 の解答・解説」

©ミライコーチング

演習 4

半径 1.0 m の円周上を、物体が周期 4.0 s で反時計回りに等速円運動している。

物体は円の右端 A から出発する。円の左端を B とし、A から B までは上側の半円を通って進む。

演習 4(1) 出発から 4.0 s 後までの道のりと変位を求めよ。

演習 4(2) (1)の時間区間における平均の速さと平均速度を求めよ。

演習 4(3) 出発から 2.0 s 後までの道のりと変位を求めよ。変位は向きも明示せよ。

演習 4(4) (3)の時間区間における平均の速さと平均速度を求めよ。

演習 4(5) 「平均速度が 0 であれば、その間の物体の速さも 0 だった」という主張が正しいか説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 4 の解答・解説」

演習 5

半径 1.0 m の円周上を、物体がある時点から一定の向きに逆戻りせず、4.0 s 間でちょうど 1 周した。

ただし、速さが一定であったかどうかは分かっていない。

演習 5(1) この 4.0 s 間の道のりと平均の速さを求めよ。

演習 5(2) 「物体の速さは、どの瞬間も $\frac{\pi}{2}$ m/s であった」と結論できるか。理由を説明せよ。

演習 5(3) 同じ運動について「実は等速円運動であった」という条件を追加した。この場合の一定の角速度の大きさ ω を求めよ。また、どの瞬間にも使える速さ v を求めよ。

対応解説：巻末の「演習 5 の解答・解説」

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1) 周期

毎秒の回転数と周期の関係は

$$T = \frac{1}{f}$$

である。

$f = 3\,\mathrm{Hz} = 3\,\mathrm{s^{-1}}$ を代入すると、

$$T = \frac{1}{3\,\mathrm{s^{-1}}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{s}$$

となる。

答え：$T = \frac{1}{3}\,\mathrm{s}$

演習 1(2) 角速度

1 周は $2\pi\,\mathrm{rad}$ であり、毎秒 3 回転するので、

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi \times 3\,\mathrm{s^{-1}} \\ &= 6\pi\,\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

となる。

答え：$\omega = 6\pi\,\mathrm{rad/s}$

演習 1(3) 円周上の速さ

等速円運動なので、

$$v = r\omega$$

を使う。

$$\begin{aligned}v &= 0.50\,\mathrm{m} \times 6\pi\,\mathrm{s^{-1}} \\ &= 3\pi\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

したがって、速さは $3\pi\,\mathrm{m/s}$ である。

答え：$v = 3\pi\,\mathrm{m/s}$

演習 1(4) 総回転数と累積角度

総回転数は、毎秒の回転数と経過時間の積で求められる。

$$\begin{aligned}N &= ft \\ &= 3\,\mathrm{s^{-1}} \times 4\,\mathrm{s} \\ &= 12\,\text{回}\end{aligned}$$

1 回転につき $2\pi\,\mathrm{rad}$ 進むので、12 回転の累積角度は

$$\theta = 12 \times 2\pi\,\mathrm{rad} = 24\pi\,\mathrm{rad}$$

である。

角度は 1 周したところで 0 に戻して数え直すのではなく、進んだ合計として表す。

答え：$N = 12$ **回**、$\theta = 24\pi\,\mathrm{rad}$

演習 1(5) 道のりと変位

円周 1 周分の道のりは

$$L = 2\pi \times 0.50\,\mathrm{m} = \pi\,\mathrm{m}$$

である。

12 回転しているので、

$$\begin{aligned} s &= 12 \times \pi\,\mathrm{m} \\ &= 12\pi\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

一方、12 回転は整数回の回転なので、最終位置は出発位置と一致する。このため、変位は 0 である。

答え：道のり $12\pi\,\mathrm{m}$**、変位** $0\,\mathrm{m}$

道のりは実際の移動経路の長さであり、変位は始点と終点の位置の差である。最終位置が出発点と同じでも、途中に進んだ道のりは消えない。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1) 進んだ角度

弧の長さ s と半径 r の関係は、

$$\theta = \frac{s}{r}$$

である。

与えられた長さの単位は、ともに m でそろっている。

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1.20\,\mathrm{m}}{0.80\,\mathrm{m}} \\ &= 1.50\,\mathrm{rad} \end{aligned}$$

となる。

答え：$\theta = 1.50\,\mathrm{rad}$

ここで求めたのは角度であり、長さではない。弧の長さを半径で割るのであって、半径を弧の長さで割るのではない。

演習 2(2) 角速度

等速円運動であり、$0.30\,\mathrm{s}$ 間に $1.50\,\mathrm{rad}$ 進むので、

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\theta}{t} \\ &= \frac{1.50\,\mathrm{rad}}{0.30\,\mathrm{s}} \\ &= 5\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

となる。

答え：$\omega = 5\,\mathrm{rad/s}$

演習 2(3) 円周上の速さ

$v = r\omega$ より、

$$\begin{aligned} v &= 0.80\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{s}^{-1} \\ &= 4.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

また、弧の長さを経過時間で割っても、

$$v = \frac{1.20\,\mathrm{m}}{0.30\,\mathrm{s}} = 4.0\,\mathrm{m/s}$$

と一致する。

答え：$v = 4.0\,\mathrm{m/s}$

演習 2(4) 周期

1 周すると $2\pi\,\mathrm{rad}$ 進む。

角速度が $5\,\mathrm{rad/s}$ なので、周期は

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{5\,\mathrm{rad/s}} \\ &= \frac{2\pi}{5}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

である。

答え：$T = \frac{2\pi}{5}\,\mathrm{s}$

一部の弧について進んだ角度と所要時間が分かれば、等速という条件の下で 1 周分の時間へ換算できる。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1) A、B の速さ

角速度が同じ場合の比較である。

物体 A について、

$$\begin{aligned} v_A &= r_A \omega_A \\ &= 0.50\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{s}^{-1} \\ &= 1.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

物体 B について、

$$\begin{aligned} v_B &= r_B \omega_B \\ &= 1.50\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{s}^{-1} \\ &= 3.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

答え：A は $1.0\,\mathrm{m/s}$、B は $3.0\,\mathrm{m/s}$

演習 3(2) A、B の周期

両方とも角速度の大きさが $2\,\mathrm{rad/s}$ である。

したがって、

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{2\,\mathrm{rad/s}} \\ &= \pi\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

同様に、

$$T_B = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{2\,\mathrm{rad/s}} = \pi\,\mathrm{s}$$

である。

答え：$T_A = T_B = \pi\,\mathrm{s}$

演習 3(3) 同じ角速度と速さの関係

「角速度が同じなら円周上の速さも同じ」という考えは、一般には正しくない。

理由は、速さが

$$v = r\omega$$

で決まるためである。

角速度 ω を同じに保った場合、速さ v は半径 r に比例する。

今回、B の半径は A の 3 倍なので、速さも 3 倍になっている。

答え：正しくない。同じ角速度でも、半径が大きい物体ほど単位時間に進む弧が長くなり、円周上の速さが大きくなるためである。

演習 3(4) C、D の角速度

今度は、速さが同じで半径が異なる比較である。

$v = r\omega$ を変形すると、

$$\omega = \frac{v}{r}$$

となる。

物体 C について、

$$\begin{aligned}\omega_C &= \frac{2\,\mathrm{m/s}}{1.0\,\mathrm{m}} \\ &= 2\,\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

である。

物体 D について、

$$\begin{aligned}\omega_D &= \frac{2\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{m}} \\ &= 1\,\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

となる。

答え：$\omega_C = 2\,\mathrm{rad/s}$、$\omega_D = 1\,\mathrm{rad/s}$

演習 3(5) C、D の周期

物体 C の周期は

$$\begin{aligned}T_C &= \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{2\,\mathrm{rad/s}} \\ &= \pi\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

である。

物体 D の周期は

$$\begin{aligned}T_D &= \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{rad/s}} \\ &= 2\pi\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

となる。

答え：$T_C = \pi\,\mathrm{s}$、$T_D = 2\pi\,\mathrm{s}$

同じ速さで円運動する場合、半径が大きいほど 1 周の道のりが長くなる。そのため、1 周するのにかかる時間も長くなる。

半径が 2 倍になると、同じ速さでは周期も 2 倍となる。

この結果は、

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

からも確認できる。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1) 1 周の道のりと変位

半径 $1.0\,\mathrm{m}$ の円周の長さは、

$$L = 2\pi \times 1.0\,\mathrm{m} = 2\pi\,\mathrm{m}$$

である。

周期が $4.0\,\mathrm{s}$ なので、出発から $4.0\,\mathrm{s}$ 後には、ちょうど 1 周して出発点 A に戻る。

そのため、道のりは円周 1 周分の $2\pi\,\mathrm{m}$ であるが、始点と終点が一致するため変位は 0 となる。

答え：道のり $2\pi\,\mathrm{m}$**、変位** $0\,\mathrm{m}$

演習 4(2) 1 周の平均の速さと平均速度

平均の速さは、道のりを経過時間で割って求める。

$$\begin{aligned}\text{平均の速さ} &= \frac{2\pi\,\mathrm{m}}{4.0\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

一方、平均速度は変位を経過時間で割る。

$$\text{平均速度} = \frac{0\,\mathrm{m}}{4.0\,\mathrm{s}} = 0\,\mathrm{m/s}$$

である。

答え：平均の速さ $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$**、平均速度** $0\,\mathrm{m/s}$

平均速度は 0 でも、平均の速さは 0 ではない。両者の分子に使う量が、変位と道のりで異なるためである。

演習 4(3) 半周の道のりと変位

2.0 s は周期 4.0 s の半分なので、この間に半周する。

円周の半分の道のりは

$$s = \frac{1}{2} \times 2\pi\,\mathrm{m} = \pi\,\mathrm{m}$$

である。

右端 A から上側の半円を反時計回りに進むと、終点は左端 B になる。

始点 A と終点 B を結ぶ直線は直径であり、長さは

$$AB = 2 \times 1.0\,\mathrm{m} = 2.0\,\mathrm{m}$$

である。

したがって、変位は**左向きに** 2.0 m となる。

答え：道のり π m、変位は左向きに 2.0 m

演習 4(4) 半周の平均の速さと平均速度

道のりは π m、経過時間は 2.0 s である。

したがって、平均の速さは

$$\begin{aligned} \text{平均の速さ} &= \frac{\pi\,\mathrm{m}}{2.0\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

平均速度は変位を経過時間で割るため、

$$\begin{aligned} \text{平均速度の大きさ} &= \frac{2.0\,\mathrm{m}}{2.0\,\mathrm{s}} \\ &= 1.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。向きは変位と同じ左向きである。

答え：平均の速さ $\frac{\pi}{2}$ m/s、平均速度は左向きに大きさ 1.0 m/s

半周の場合も、弧に沿って進んだ道のりと、始点から終点への直線的な位置の変化は異なる。

演習 4(5) 平均速度が 0 の意味

この主張は正しくない。

平均速度が 0 ということは、その時間区間の変位が 0 であったことを意味する。

例えば、今回のように円を 1 周して出発点に戻れば、運動中に一定の速さで動いていても平均速度は 0 になる。

答え：正しくない。平均速度が 0 でも、途中で移動して出発点に戻っていれば道のりは正となり、速さも 0 とは限らないためである。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1) 道のりと平均の速さ

物体は半径 $1.0\,\mathrm{m}$ の円を、逆戻りせずにちょうど 1 周している。

したがって、道のりは

$$s = 2\pi \times 1.0\,\mathrm{m} = 2\pi\,\mathrm{m}$$

である。

経過時間は $4.0\,\mathrm{s}$ なので、

$$\begin{aligned} \text{平均の速さ} &= \frac{2\pi\,\mathrm{m}}{4.0\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

答え：道のり $2\pi\,\mathrm{m}$、平均の速さ $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$

演習 5(2) 瞬間の速さを決められるか

どの瞬間も速さが $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$ であったとは結論できない。

与えられているのは、円を 1 周した道のりと、その運動にかかった合計時間だけである。

例えば、前半に速く進み、後半に遅く進んだとしても、合計で $4.0\,\mathrm{s}$ かけて 1 周することはできる。

したがって、計算で求めた $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$ は、4 秒間全体の平均の速さである。

答え：結論できない。1 周の道のりと合計時間だけでは、途中の瞬間の速さが一定であったか分からないためである。

演習 5(3) 等速条件を追加した場合

等速円運動であると分かったので、角速度の大きさは一定である。

1 周で進む角度は $2\pi\,\mathrm{rad}$、1 周にかかる時間は $4.0\,\mathrm{s}$ なので、

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{4.0\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

となる。

円周上の速さは、

$$\begin{aligned} v &= r\omega \\ &= 1.0\,\mathrm{m} \times \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s^{-1}} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

答え：角速度の大きさ $\omega = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$、速さ $v = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$

等速という条件があるため、区間全体の平均の速さと、運動中のどの瞬間の速さも一致する。

このように、円運動の問題では、半径や周期だけでなく、**速さが一定であるかどうか**を確認してから式を使うことが重要である。