

第 12 講 根号を含む式の計算

学習目標

- 根号の中から平方になっている因数を取り出し、根号を含む数を簡単にできる。
- 根号を含む数の積と商を正しく計算できる。
- 同じ根号をもつ項を見分け、加法・減法を計算できる。
- 分母に根号がある式を、分母を有理数にして表せる。

根号を含む式は「同じ形」にそろえて計算する

最初に形を整える理由

$\sqrt{12}$ と $\sqrt{3}$ は、一見すると別の数に見えます。
しかし、 $12 = 4 \cdot 3$ なので、

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

と変形できます。
すると、たとえば $\sqrt{12} + \sqrt{3}$ は、

$$2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

と計算できます。
根号を含む式では、すぐに足したり引いたりするのではなく、**根号の中から平方になっている部分を取り出して、同じ形にそろえられないかを見る**ことが大切です。

平方になっている因数を探す

$a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ のとき、

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

が成り立ちます。
特に、 $m \geq 0$ のとき、

$$\sqrt{m^2a} = m\sqrt{a}$$

です。
たとえば、

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

となります。

根号の中の足し算は分けられない

積については $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ とできますが、

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

とは限りません。
たとえば、 $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ですが、 $\sqrt{1} + \sqrt{4} = 3$ です。
根号を分けられるのは、ここで扱う基本計算では**積や商の形**であることに注意します。

根号を簡単にする

できるだけ大きな平方数を探す

$\sqrt{72}$ を簡単にしてみます。
72 の因数には 4、9、36 などの平方数があります。このうち 36 を使うと、
$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

と一度で簡単にできます。
小さな平方数から何度か取り出しても同じ結果になりますが、できるだけ大きな平方数を見つけると計算が短くなります。

根号を簡単にする手順

- 根号の中の数を、平方数とそれ以外の数の積に分ける。
- 平方数の平方根を根号の外へ出す。
- 根号の中に、さらに取り出せる平方数が残っていないか確認する。

積と商の計算

掛け算では根号の中をまとめられる

正の数について、根号どうしの積は、

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

とまとめられます。
たとえば、

$$\sqrt{6}\sqrt{15} = \sqrt{90}$$

です。
ここで終わらず、 $90 = 9 \cdot 10$ と考えると、

$$\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

となります。
したがって、根号どうしを掛けたあとも、最後に簡単にできないか確認します。

割り算も根号の中でまとめられる

$a \geq 0$ 、 $b > 0$ のとき、

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

が成り立ちます。
たとえば、

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

です。
先にそれぞれの根号を簡単にしてから計算しても構いません。計算しやすい方を選びます。

■ 加法・減法は根号の中をそろえる

文字式の同類項と同じように考える

$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ では、どちらの項にも $\sqrt{3}$ が共通しています。
そこで、

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

と計算できます。
これは $2x + 5x = 7x$ と同じ考え方です。
一方、 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は根号の中が異なるため、このままでは1つの根号の項にまとめられません。

計算する前に根号を簡単にする

$\sqrt{8} + \sqrt{18}$ は、根号の中が8と18なので、そのままでは同じ形に見えません。
しかし、

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

であり、

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

です。
したがって、

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

となります。
加法・減法では、先にそれぞれの根号を簡単にしてから、同じ根号をもつ項をまとめるのが基本です。

■ 分母の根号をなくす

分母の有理化

分母に根号を含む分数で、分数の値を変えずに分母から根号をなくすことを、**分母を有理化する**といいます。

分子と分母に同じ根号を掛ける

たとえば、

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

の分母には $\sqrt{3}$ があります。
分子と分母に同じ $\sqrt{3}$ を掛けると、分数の値は変わりません。

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となります。
分母にある $\sqrt{3}$ にもう1つ $\sqrt{3}$ を掛けると3になることを利用しています。

根号を含む式の基本的な計算順序

根号を含む式では、次の順序で確認すると計算しやすくなります。

1. 根号の中から平方になっている因数を取り出せないか。
2. 積や商なら、根号の中をまとめると簡単にならないか。
3. 加法・減法なら、同じ根号をもつ項にそろえられないか。
4. 分母に根号が残っていれば、有理化できないか。

例題

例題 1

次の数を簡単にしなさい。

- (1) $\sqrt{45}$
- (2) $\sqrt{75}$
- (3) $\sqrt{108}$

例題 1 の解答・解説

(1) $45 = 9 \cdot 5$ なので、

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

です。

(2) $75 = 25 \cdot 3$ なので、

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

です。

(3) $108 = 36 \cdot 3$ なので、

$$\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$$

です。

根号の中にある平方数を見つけ、その部分を根号の外へ出します。

例題 2

次の式を計算しなさい。

- (1) $\sqrt{6}\sqrt{24}$
- (2) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$
- (3) $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{10}$

例題 2 の解答・解説

(1) 根号の中をまとめます。

$$\begin{aligned}\sqrt{6}\sqrt{24} &= \sqrt{144} \\ &= 12\end{aligned}$$

(2) 商を 1 つの根号にまとめます。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{48}{3}} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4\end{aligned}$$

(3) 根号の外の数どうし、根号どうしをそれぞれ掛けます。

$$\begin{aligned}2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{10} &= 6\sqrt{50} \\ &= 6\sqrt{25 \cdot 2} \\ &= 30\sqrt{2}\end{aligned}$$

積や商では、途中で根号をまとめたあと、さらに簡単にできないかを確認します。

例題 3

次の式を計算しなさい。

- (1) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
- (2) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$
- (3) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

例題 3 の解答・解説

(1) 根号の中が同じなので、係数を加えます。

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

(2) それぞれの根号を簡単にします。

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

また、

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

なので、

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

です。

(3) 分子と分母に $\sqrt{2}$ を掛けます。

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{2}} &= \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

したがって、答えは順に $8\sqrt{2}$ 、 $5\sqrt{3}$ 、 $2\sqrt{2}$ です。

演習問題

練習問題 1

次の数を簡単にしなさい。

- (1) $\sqrt{28}$
- (2) $\sqrt{63}$
- (3) $\sqrt{200}$

練習問題 2

次の式を計算しなさい。

- (1) $\sqrt{3}\sqrt{12}$
- (2) $\sqrt{8}\sqrt{6}$
- (3) $2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6}$

練習問題 3

次の式を計算しなさい。

- (1) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
- (2) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}}$
- (3) $\frac{3\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$

練習問題 4

次の式を計算しなさい。

- (1) $4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$
- (2) $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
- (3) $2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

練習問題 5

次の式を計算しなさい。

- (1) $\sqrt{8} + \sqrt{32}$
- (2) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$
- (3) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$

練習問題 6

次の式の分母を有理化しなさい。

- (1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
- (3) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$

練習問題 7

次の式を計算しなさい。

$$\frac{\sqrt{18} + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

練習問題 8

次の計算について、誤っているものを 1 つ選び、その理由を説明しなさい。

- (ア) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- (イ) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$
- (ウ) $\sqrt{4+5} = \sqrt{4} + \sqrt{5}$
- (エ) $\sqrt{6}\sqrt{6} = 6$

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

- (1) $28 = 4 \cdot 7$ なので、 $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ です。
(2) $63 = 9 \cdot 7$ なので、 $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ です。
(3) $200 = 100 \cdot 2$ なので、 $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ です。
平方になっている因数をできるだけ大きく取ると、短く計算できます。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) $\sqrt{3}\sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$
(2) $\sqrt{8}\sqrt{6} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$
(3) $2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} = 8\sqrt{18} = 8 \cdot 3\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$
したがって、答えは順に 6、 $4\sqrt{3}$ 、 $24\sqrt{2}$ です。

練習問題 3 の解答・解説

- (1) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$
(2) $\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\frac{72}{8}} = \sqrt[3]{9} = 3$
(3) $\frac{\sqrt[5]{30}}{\sqrt[5]{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{30}{5}} = 3\sqrt[5]{6}$
したがって、答えは順に 5、3、 $3\sqrt[5]{6}$ です。

練習問題 4 の解答・解説

- (1) 同じ $\sqrt{7}$ をもつ項なので、

$$4\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

です。

- (2)

$$6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

です。

- (3)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 5\sqrt{3} &= (2 + 1 - 5)\sqrt{3} \\ &= -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

です。

文字式と同類項をまとめるときと同じように、同じ根号をもつ項の係数を計算します。

練習問題 5 の解答・解説

- (1) それぞれ簡単にすると、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
また、 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
なので、 $\sqrt{8} + \sqrt{32} = 6\sqrt{2}$ です。

練習問題 5 の解答・解説 (2)

- (2) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
また、 $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
なので、 $\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{5}$ です。

練習問題 5 の解答・解説 (3)

- (3) $2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$
また、 $3\sqrt{27} = 9\sqrt{3}$
なので、 $2\sqrt{12} + 3\sqrt{27} = 13\sqrt{3}$ です。
したがって、答えは順に $6\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $13\sqrt{3}$ です。

練習問題 6 の解答・解説

- (1) 分子と分母に $\sqrt{5}$ を掛けます。 $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ です。
(2) 分子と分母に $\sqrt{6}$ を掛けます。 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{6} = 1$ です。
(3) 分子と分母に $\sqrt{7}$ を掛けます。 $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7}{7} = 1$ です。
したがって、答えは順に $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 、 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ です。

練習問題 7 の解答・解説

分子の根号を先に簡単にします。

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

また、

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

なので、分子は $5\sqrt{2}$ です。
したがって、

$$\frac{\sqrt{18} + \sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5$$

です。

答えは 5 です。

複数の計算が含まれる式でも、「根号を簡単にする」「同じ形をまとめる」という順序を意識すると整理しやすくなります。

練習問題 8 の解答・解説

誤っているのは (ウ) です。

(ア) は、 $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ なので正しいです。

(イ) は、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ なので、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ となり、正しいです。

(ウ) の左辺は、 $\sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$ です。

一方、右辺は、 $\sqrt{4} + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$ であり、3 とは一致しません。

したがって、根号の中が和になっているときに、それぞれへ根号を分けることはできません。

(エ) は、 $\sqrt{6}\sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$ なので正しいです。

根号を含む式の最終チェック

- 根号の中に 4, 9, 16 などの平方数の因数が残っていないか確認します。
- 掛け算・割り算を整理してから、同じ根号をもつ項だけをまとめます。
- 分母に根号が残るときは有理化します。
- $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ と分けることはできません。