

第 125 講 常用対数

学習目標

この講では、常用対数を用いて数の大きさや桁数を判断できるようになることを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 常用対数の定義から基本的な値を求める。
- ・ 数を 10 の累乗の範囲でとらえ、対数の値から桁数を判断する。
- ・ $0 < X < 1$ の小数について、初めて非零数字が現れる位置を対数の範囲から判断する。

常用対数の定義

常用対数とは、底が 10 の対数である。

この講では、底を書かない $\log x$ は常に $\log_{10} x$ を表すものとする。

$x > 0$ に対して、 $p = \log x$ とは、10 を p 乗すると x になることを意味する。

すなわち、 $10^p = x \Leftrightarrow \log x = p$ である。

特に、対数は指数の逆の操作である。

対数と十進表記の関係

指数と対数の関係を見ると、数の大きさを 10 の累乗で判断できる。

例えば、 $10^3 = 1000$ であるから、1000 は $\log$ を使うと 3 になる。

一般に、 $\log(10^p) = p$ である。

また、 $x > 0$ に対して、 $10^{\log x} = x$ が成り立つ。

これは、対数が「何乗すればその数になるか」を表す値だからである。

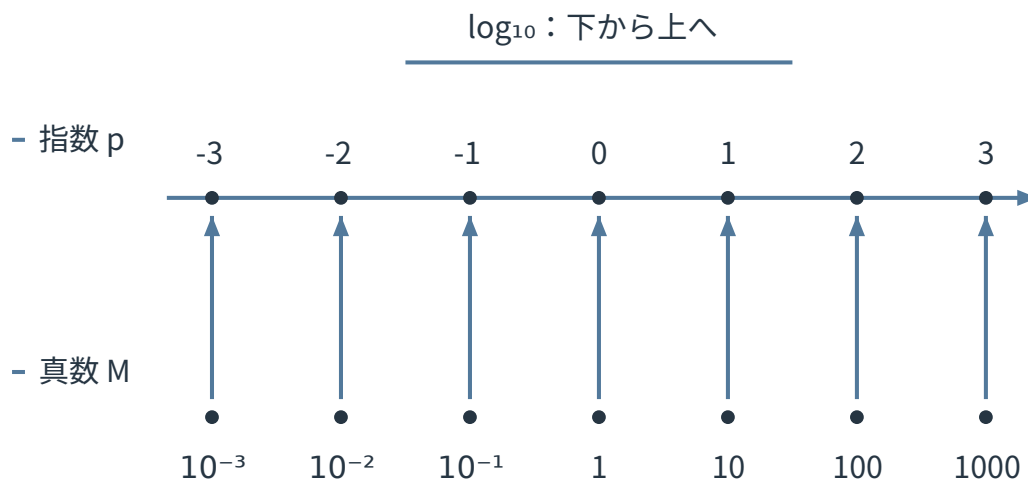


図 1 上段は指数 p の数直線で、-3 から 3 まで等間隔。下段は $M = 10^p$ の対応一覧であり、 M の値の差を間隔で表す数直線ではない。上向き矢印は $p = \log_{10} M$ と、真数 M から指数 p を読む向きを示す。

正の数 X は、必ず k を整数、 m を $1 \leq m < 10$ を満たす実数として、 $X = m \times 10^k$ と表すことができる。

このとき、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\log X &= \log (m \times 10^k) \\ &= \log m + \log (10^k) \\ &= k + \log m\end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \log m < 1$ である。

したがって、 $k \leq \log X < k+1$ である。

このことから、 $\log X$ を挟む連続する整数 k と $k+1$ の区間を見れば、数 X がどの 10 の累乗の範囲にあるかを判断できる。

整数の桁数と対数の区間

正の整数 N が n 桁である条件は、 $10^{n-1} \leq N < 10^n$ である。

両辺の対数を考えると、 $n-1 \leq \log N < n$ となる。

つまり、 N の桁数は $\log N$ がどの整数区間に入るかで判断できる。

例えば、 $3 \leq \log N < 4$ なら、 $10^3 \leq N < 10^4$ なので、 N は 4 桁である。

なお、 10^n は n 桁ではなく、 $n+1$ 桁の数である。

例えば、 $10^3 = 1000$ は 4 桁であり、境界では上側の桁数になることに注意する。

1 未満の小数と対数

$0 < X < 1$ の小数では、対数は負になる。

初めて非零数字が現れる位置を考える。

通常の十進小数表示を用いると、小数第 k 位に初めて非零数字が現れる条件は、 k を正の整数として、 $10^{-k} \leq X < 10^{-k+1}$ である。

ここで、9 が無限に続く別表記は用いず、通常の十進小数表示だけを考える。

この両辺の対数を考えると、 $-k \leq \log X < -k+1$ となる。

したがって、 $0 < X < 1$ の小数では、 $\log X$ が入る負の整数区間を見ることで、初めて非零数字が現れる位置を判断できる。

負の値の区間では、値を 0 に近づける方向の整数だけを見るのではなく、不等式で表された区間をそのまま確認することが重要である。

特に下端の等号を含む場合は、 $10^{-k} \leq X$ および $-k \leq \log X$ のように、境界を含めて判断する。

近似値を使うときの注意

近似値は厳密な等号ではない。

例えば、 $9.542 < \log N < 9.544$ という情報からは、 $\log N$ が 9 以上 10 未満であることを判断する。一方で、近似した値が整数境界に非常に近い場合、丸めた値だけを見て桁数を断定してはいけな

い。
必要な場合は、整数境界をまたがない十分な範囲を確認する。

常用対数の基本値

次の値を定義から求めなさい。

(1) $\log 1000$

(2) $\log 0.01$

(3) $\log \sqrt{10}$

常用対数の基本値の解答・解説

常用対数は、10 を何乗すると真数になるかを表す。

(1) $1000 = 10^3$ であるから、 $\log 1000 = \log (10^3) = 3$ である。

(2) $0.01 = 10^{-2}$ であるから、 $\log 0.01 = \log (10^{-2}) = -2$ である。

(3) $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$ であるから、次のように計算する。

$$\log \sqrt{10} = \log (10^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$$

したがって、求める値はそれぞれ 3、 -2 、 $\frac{1}{2}$ である。

大きな整数の桁数

$N = 3^{20}$ は何桁の整数であるか求めなさい。

ただし、 $0.4771 < \log 3 < 0.4772$ を用いてよい。

大きな整数の桁数の解答・解説

大きな整数を直接計算するのではなく、対数の範囲から桁数を判断する。

まず、 $N = 3^{20}$ なので、 $\log N = \log (3^{20}) = 20 \log 3$ である。

与えられた範囲を 20 倍すると、 $9.542 < \log N < 9.544$ となる。

この範囲から、 $9 \leq \log N < 10$ である。

したがって、 $10^9 \leq N < 10^{10}$ となる。

この範囲に入る整数は 10 桁である。

よって、 3^{20} は 10 桁の整数である。

大きな整数を直接計算しなくても、対数によって 10 の累乗との位置関係が分かるため、桁数を判断できる。

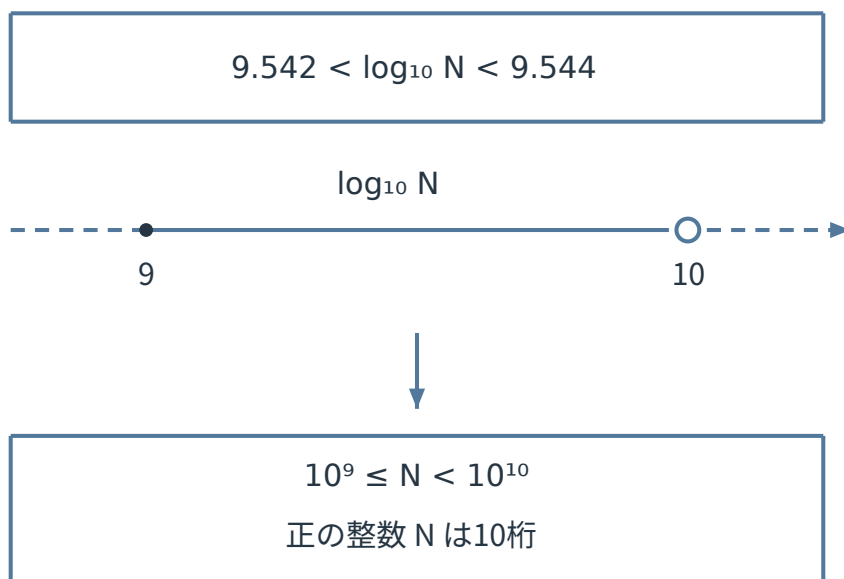


図2 $N = 3^{20}$ 。与えられた $0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ を 20 倍すると $9.542 < \log_{10} N < 9.544$ 。したがって $9 \leq \log_{10} N < 10$ 。実線は単位区間 $[9, 10)$ 、破線は範囲外の補助軸。黒丸の 9 を含み、白丸の 10 を除く。上の厳密な狭い範囲は拡大して描かず、式で示した。

小数の先頭数字の位置

$X = \left(\frac{1}{2}\right)^8$ について、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか求めなさい。
ただし、 $0.3010 < \log 2 < 0.3011$ を用いてよい。

小数の先頭数字の位置の解答・解説

まず、 X の対数を考える。

$$X = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 2^{-8}$$

であるから、 $\log X = -8 \log 2$ となる。

与えられた範囲を -8 倍すると、不等号の向きが逆になることに注意する。

$-8 \times 0.3011 < \log X < -8 \times 0.3010$ より、 $-2.4088 < \log X < -2.4080$ となる。

この範囲は、 $-3 \leq \log X < -2$ に含まれる。

したがって、 $10^{-3} \leq X < 10^{-2}$ である。

これは、小数第 3 位に初めて非零数字が現れることを意味する。

よって、 X は小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れる。

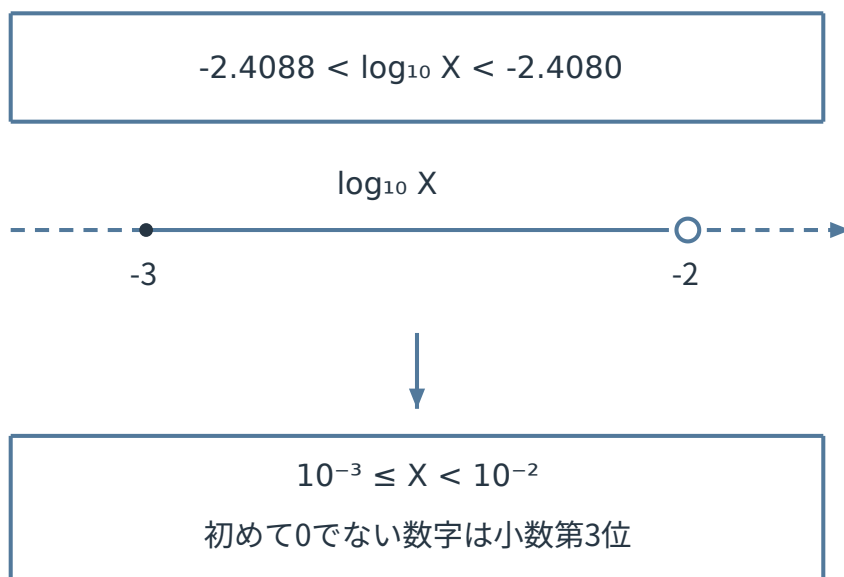


図3 $X = (\frac{1}{2})^8$ 。与えられた $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を -8 倍すると向きが逆になり、 $-2.4088 < \log_{10} X < -2.4080$ 。よって $-3 \leq \log_{10} X < -2$ 。実線は $[-3, -2)$ 、黒丸の -3 を含み、白丸の -2 を除く。上の狭い厳密範囲は式で示し、拡大して描いていない。

常用対数の基本計算

次の値を求めなさい。

- (1) $\log 10000$
- (2) $\log \left\{ \frac{1}{100} \right\}$
- (3) $\log \sqrt[3]{10}$

対数の範囲から桁数を判断する

正の整数 $N = 2^{15}$ は何桁の整数であるか求めなさい。

ただし、 $0.3010 < \log 2 < 0.3011$ を用いてよい。

3の累乗の桁数

正の整数 $N = 3^{18}$ は何桁の整数であるか求めなさい。

ただし、 $0.4771 < \log 3 < 0.4772$ を用いてよい。

小数の最初の非零桁

$0 < X < 1$ とし、 $X = \left\{ \frac{1}{2} \right\}^{12}$ とする。

X の小数第何位に初めて0でない数字が現れるか求めなさい。

ただし、 $0.3010 < \log 2 < 0.3011$ を用いてよい。

負の対数の区間判断

$0 < X < 1$ とし、 $X = \{\frac{1}{3}\}^9$ とする。

X の小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか求めなさい。

ただし、 $0.4771 < \log 3 < 0.4772$ を用いてよい。

10 の境界と桁数

正の整数 N について、 $10^5 \leq N < 10^6$ が成り立つ。

N の桁数を求め、対応する対数の範囲を示しなさい。

丸め値だけでは判断できない場合

正の整数 N について、 $9.999 < \log N < 10.001$ という情報だけが与えられている。

この情報から N の桁数を断定できるか答えなさい。理由も説明しなさい。

対数区間から数の範囲を読む

正の数 X が、 $-4 \leq \log X < -3$ を満たす。

X が入る範囲を 10 のべきを用いて示し、小数で初めて非零数字が現れる位置を求めなさい。

常用対数の基本計算の解答・解説

常用対数では、10 を何乗すると真数になるかを考える。

(1) $10000 = 10^4$ なので、 $\log 10000 = 4$ である。

(2) $\frac{1}{100} = 10^{-2}$ なので、 $\log \left\{ \frac{1}{100} \right\} = -2$ である。

(3) $\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}}$ なので、 $\log \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}$ である。

指数の形へ直すことで、常用対数の値を直接判断できる。

対数の範囲から桁数を判断する解答・解説

$N = 2^{15}$ であるから、 $\log N = 15 \log 2$ となる。

与えられた範囲を 15 倍すると、 $4.515 < \log N < 4.5165$ となる。

したがって、 $4 \leq \log N < 5$ である。

対数の範囲を 10 のべきに戻すと、 $10^4 \leq N < 10^5$ となる。

よって、 N は 5 桁の整数である。

直接 2^{15} を計算せず、10 のべきとの位置関係だけを調べれば桁数が分かる。

3 の累乗の桁数の解答・解説

$N = 3^{18}$ より、 $\log N = 18 \log 3$ である。

与えられた範囲を 18 倍すると、 $8.5878 < \log N < 8.5896$ となる。

したがって、 $8 \leq \log N < 9$ である。

よって、 $10^8 \leq N < 10^9$ となる。

この範囲の正の整数は 9 桁である。

境界では、 10^8 が含まれるため 8 桁ではなく 9 桁になることに注意する。

小数の最初の非零桁の解答・解説

$X = \left\{\frac{1}{2}\right\}^{12} = 2^{-12}$ であるから、 $\log X = -12 \log 2$ となる。

ここで、 -12 は負の数であるため、与えられた不等式を掛けると不等号の向きが反転する。

$-12 \times 0.3011 < \log X < -12 \times 0.3010$ より、 $-3.6132 < \log X < -3.6120$ となる。

この範囲から、 $-4 \leq \log X < -3$ である。

したがって、 $10^{-4} \leq X < 10^{-3}$ となる。

これは、小数第 4 位に初めて非零数字が現れることを意味する。

よって、 X は小数第 4 位に初めて 0 でない数字が現れる。

負の対数の区間判断の解答・解説

$X = \left\{\frac{1}{3}\right\}^9 = 3^{-9}$ であるから、 $\log X = -9 \log 3$ となる。

-9 は負の数なので、与えられた不等式を掛けると不等号の向きが反転する。

$-9 \times 0.4772 < \log X < -9 \times 0.4771$ より、 $-4.2948 < \log X < -4.2939$ となる。

この範囲から、 $-5 \leq \log X < -4$ である。

したがって、 $10^{-5} \leq X < 10^{-4}$ となる。

よって、 X は小数第 5 位に初めて非零数字が現れる。

負の対数では、値を 0 に近づける方向で判断するのではなく、 $\log X$ が含まれる整数区間と対応する 10 のべきの範囲を確認することが重要である。

10 の境界と桁数の解答・解説

与えられた条件は、 $10^5 \leq N < 10^6$ である。

両辺の対数を考えると、 $5 \leq \log N < 6$ となる。

したがって、 N は $10^5 \leq N < 10^6$ の範囲にある。

10^5 は、100000 であり 6 桁である。

よって、 N は 6 桁の整数である。

10 の整数乗は、左側の境界に含まれるため、次の桁数になることに注意する。

丸め値だけでは判断できない場合の解答・解説

与えられた範囲は、 $9.999 < \log N < 10.001$ である。

この範囲は、整数境界である 10 をまたいでいる。

もし、 $9.999 < \log N < 10$ であれば、 $10^9 < N < 10^{10}$ となるため、 N は 10 桁の整数である。

一方で、 $10 \leq \log N < 10.001$ であれば、 $10^{10} \leq N < 10^{10.001}$ となる。

ここで、 $10.001 < 11$ であるため、 $10^{10} \leq N < 10^{11}$ となり、 N は必ず 11 桁の整数である。

したがって、与えられた情報全体では、 $\log N$ が 10 より小さい場合と 10 以上の場合の両方が含まれるため、桁数を一意には確定できない。

近似値だけを見るのではなく、対数の範囲が整数境界をまたぐかどうかを確認することが重要である。

対数区間から数の範囲を読む解答・解説

与えられた条件は、 $-4 \leq \log X < -3$ である。

対数を 10 のべきに戻すと、 $10^{-4} \leq X < 10^{-3}$ となる。

したがって、 $0.0001 \leq X < 0.001$ である。

小数第 k 位に初めて非零数字が現れる条件は、 $10^{-k} \leq X < 10^{-k+1}$ である。

ここでは、 $10^{-4} \leq X < 10^{-3}$ なので、 $k = 4$ である。

よって、 X は小数第 4 位に初めて非零数字が現れる。