

第 180 講 関数の極限

学習目標

この講では、次のことができるようになることを目標とする。

- ・関数の極限が、ある点での値ではなく近づけたときの関数値の変化を表すことを説明できる。
- ・極限の記号が表す入力、関数値、極限値の役割を説明できる。
- ・多項式や分母が 0 にならない有理式の極限を求められる。
- ・除外点がある関数でも極限を考えられる場合を判断できる。
- ・表の値と極限の厳密な意味を区別できる。

関数の極限とは何か

関数の値を見るとき、多くの場合は x にある値を代入して $f(x)$ を求める。しかし、極限で注目するのは $x = a$ そのものの値ではない。

x を a に限りなく近づけたとき、 $f(x)$ がどの値に近づくかを見る。

例えば、 $f(x) = x^2$ では $x = 2$ を代入すると $f(2) = 4$ である。一方、極限では x が 2 に近い値を取ったときの $f(x)$ の動きを考える。

x は 2 そのものではなく、2 の近くにある値を考える点が重要である。

関数の極限の定義

実数値関数 $f(x)$ について、有限の実数 a, L を考える。本講では、 a の両側の十分近い範囲で、 a 以外のすべての実数入力 x に対して $f(x)$ が定義されていると仮定する。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ の意味は、任意の正の誤差 ε に対し、次の条件を満たす正の δ を選べるということである。

$0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての入力 x について、 $|f(x) - L| < \varepsilon$ となる。

ここで、 ε は $f(x)$ と L の許される誤差、 δ は x を a に近づける入力側の近さを表す。

記号の意味は次の通りである。

- ・ $x \rightarrow a$ は、変数 x を有限の実数 a へ近づけることを表す。
- ・ $f(x)$ は、入力 x に対する関数の値を表す。
- ・ L は、 x を a へ近づけたときの $f(x)$ の近づく先であり、極限値という。

この定義では $x \neq a$ の入力を考えるため、 $f(a)$ が定義されているか、または $f(a)$ が L と等しいかどうかは、極限の存在を決める条件ではない。定数関数や、すべての x で $f(x) = L$ となる場合もこの定義に含まれる。

極限で見る場所

極限では、次の 3 点を区別する。

- ・ $f(a)$ が存在する場合でも、極限は近くの値だけで決まる。
- ・ $f(a)$ が未定義でも、極限が存在する場合がある。
- ・ $f(a)$ だけを別の値へ変えても、近くの値が同じなら極限は変わらない。

また、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ とは、どれほど小さい誤差を指定しても、 x を十分 a へ近づければ $f(x)$ が L からその誤差以内に入るという意味である。

極限で注意すること

有限個の表の値を調べることは、極限の様子を予想する助けにはなる。しかし、有限個の計算結果だけから極限を証明したことにはならない。

また、代入したときに $\frac{0}{0}$ の形が現れる場合、それは未定義な式の形であり、数値ではない。そのため、元の関数へ除外点を代入した等式を成立する数式のように扱ってはいけない。

分子と分母がともに 0 になる形だけでは、極限が存在するか、どの値になるかは決まらない。近づける点の近くでの関数値の変化を調べる必要がある。

極限の考え方

x を 2 へ近づけると、 x^2 がどの値へ近づくかを考える。

x が 2 に近いなら、 x^2 も 4 に近づく。このように入力の変化に対する関数値の変化を見る。

例題 1

$\lim_{x \rightarrow 2} x^2$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

多項式では、有限の実数 a に近づく極限は、 $x = a$ を代入することで求められる。

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$ は、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} x^2 &= 2^2 \\ &= 4\end{aligned}$$

この結果を極限の定義から確認する。

$x^2 - 4$ を考えると、 $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ と因数分解できる。

$x \neq 2$ であり、さらに $0 < |x - 2| < 1$ とすると、 x は 2 の近くにあるため、 $1 < x < 3$ となる。このとき、 $|x + 2| < 5$ である。

したがって、 $|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < 5 |x - 2|$ となる。

任意の正の誤差 ε に対して、 $|x - 2|$ を 1 と $\frac{\varepsilon}{5}$ の両方より小さく選ぶ。すると、 $0 < |x - 2| < 1$ を保ちながら、 $5 |x - 2| < \varepsilon$ となるため、 $|x^2 - 4| < \varepsilon$ となる。

よって、 x を 2 へ十分近づけると x^2 は 4 へ近づき、 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ が成り立つ。

ここでは、多項式の代入則による計算と、極限が誤差を任意に小さくできるという意味が一致していることを確認した。

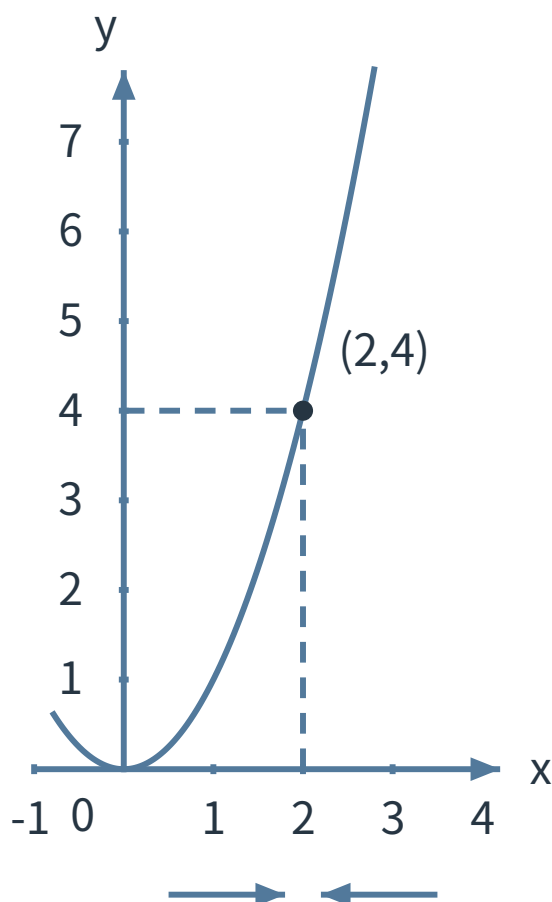


図1 実線は $y=x^2$ のグラフの一部である。横軸の下に矢印は、 x を 2 へ左右から近づける向きを表す。どちらから近づけても y は 4 へ近づく。この関数では点 $(2,4)$ もグラフ上にあり、黒点で示した。図だけで極限を証明せず、本文の式による説明と合わせて読む。

代入できない形の見分け

分数の形の極限では、まず分母が近づける点で 0 になるかを確認する必要がある。

例えば、例題 2 で扱う $x \neq 1$ のとき、 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ という関数では、近づける点 $x = 1$ で分母が 0 になるため、直接代入を使うことはできない。

このような場合は、 $x \neq 1$ の範囲で成立する式変形を行い、近傍での関数の変化を調べる必要がある。

例題 2

$x \neq 1$ のとき、 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ とする。 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

$x = 1$ では分子も分母も 0 になり、この関数では $f(1)$ が定義されない。

したがって、元の関数に $x = 1$ を入れた値を考えるのではなく、 $x \neq 1$ の範囲で式を変形する。

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= x + 1\end{aligned}$$

この約分は $x \neq 1$ の条件でのみ成り立つ。元の関数では $x = 1$ は除外されている。

よって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\ &= 2\end{aligned}$$

さらに、 $x \neq 1$ では $|f(x) - 2| = |x + 1 - 2| = |x - 1|$ となるため、 x を 1 へ近づけるほど $f(x)$ と 2 の距離は小さくなることも確認できる。

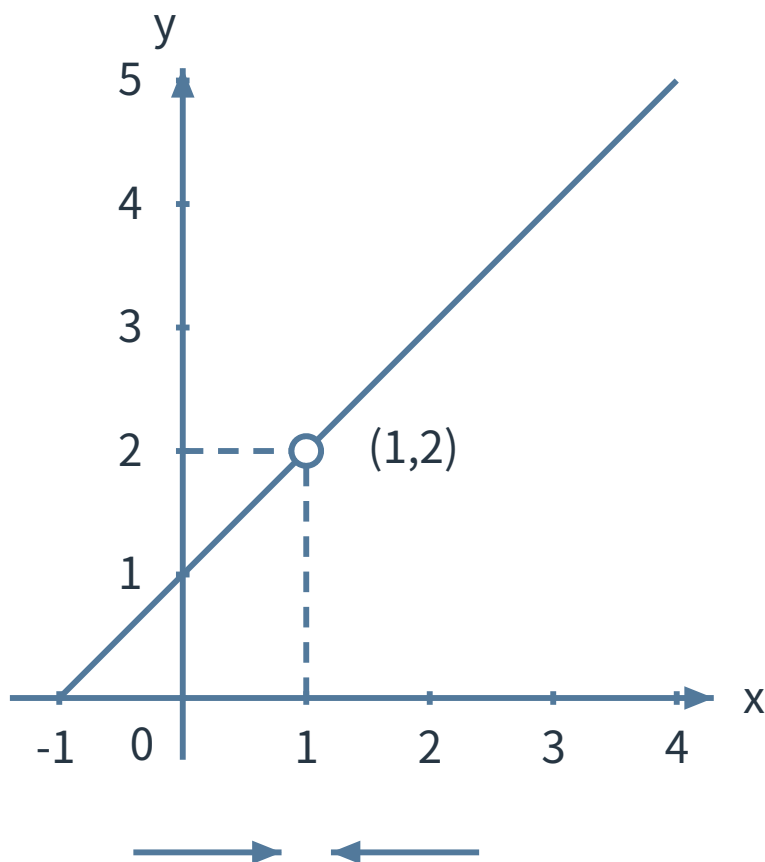


図2 $x \neq 1$ では $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$ である。白丸(1,2)は $x=1$ で関数が未定義であることを表し、グラフ上の点ではない。横軸の下に矢印の向きに x を 1 へ左右から近づけると、どちらから関数値は 2 へ近づく。白丸の円周は除外を表す記号であり、関数曲線ではない。図は表示範囲の一部で、極限の根拠は本文の式による説明である。

代入で求められる極限の範囲

多項式や有理式では、代入によって極限を求められる場合がある。

$P(x)$ 、 $Q(x)$ を実係数多項式とし、有限の実数 a について $Q(a) \neq 0$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ が成り立つ。

つまり、分母が近づく値で 0 にならない有理式では、その値を直接代入してよい。

例えば、 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2+1}$ では、分母は $2^2 + 1 = 5$ で 0 ではないため、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2+1} &= \frac{2+3}{2^2+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

一方、分母が 0 になる場合は、そのまま代入せず、例題 2 のように近づく点の近くでの関数値の変化を確認する必要がある。

例題 3

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x^2+4}$ を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

分母が 0 になるか確認する。

$x = 3$ を代入すると、分母は $3^2 + 4 = 13$ となり 0 ではない。

したがって、直接代入できる。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x^2+4} &= \frac{3+2}{3^2+4} \\ &= \frac{5}{13}\end{aligned}$$

よって、 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x^2+4} = \frac{5}{13}$ である。

このように、有理式ではまず代入して分母が 0 になるかを確認することが判断の出発点になる。

演習問題**練習問題 1**

定数関数 $f(x) = 5$ について、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ を求めなさい。

練習問題 2

$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 2)$ を求めなさい。

練習問題 3

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+3}$ を求めなさい。

練習問題 4

$x \neq 3$ のとき、 $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ とする。

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ を求めなさい。

練習問題 5

関数 $f(x)$ を次のように定める。

- $x \neq 2$ では $f(x) = x + 4$
- $x = 2$ では $f(2) = 10$

このとき、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ と $f(2)$ をそれぞれ求め、違いを説明しなさい。

練習問題 6

次の 2 つの関数を考える。

$x \neq 2$ のとき、 $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ 、 $g(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2}$ とする。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ をそれぞれ求めなさい。

(2) 分子分母ともに 0 になる形だけでは極限が決まらない理由を、(1) の結果を使って説明しなさい。

練習問題 7

関数 $f(x)$ について、 x を 2 に近づけたときの値を調べるため、次の 4 つの値を計算した。

$$f(1.9) = 3.61$$

$$f(1.99) = 3.9601$$

$$f(2.01) = 4.0401$$

$$f(2.1) = 4.41$$

この結果だけから $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ を証明したと言えるか。理由を説明しなさい。

練習問題 8

関数 $f(x)$ を、 $x \neq 4$ の範囲で $f(x) = x^2 + 1$ と定める。この関数の定義域は全実数から 4 を除いたものである。

(1) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ を求めなさい。

(2) 新しい関数 $h(x)$ を、 $x \neq 4$ では $f(x)$ と同じ値を取り、 $h(4) = 100$ と定める。このとき、 $\lim_{x \rightarrow 4} h(x)$ と $h(4)$ をそれぞれ答え、極限と関数値の違いを説明しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

定数関数では、 x の値が変化しても関数値は変化しない。

したがって、 x を 2 へ近づけても $f(x)$ は常に 5 である。

よって、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ である。

極限では $x = 2$ での値だけを見るのではなく、2 の近くでの関数値を見る。この場合は近くのすべての値が 5 になる。

練習問題 2 の解答・解説

多項式の極限では、近づける値を直接代入できる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 2) &= (-1)^2 + 3(-1) + 2 \\ &= 1 - 3 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 2) = 0$ である。

練習問題 3 の解答・解説

分母が 0 になるか確認する。

$x = 2$ を代入すると、分母は $2^2 + 3 = 7$ となり 0 ではない。

したがって、直接代入できる。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+3} &= \frac{2+1}{2^2+3} \\ &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

よって、 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+3} = \frac{3}{7}$ である。

練習問題 4 の解答・解説

$x = 3$ では分子も分母も 0 になり、元の関数ではこの点が定義されていない。

そのため、未定義な $\frac{0}{0}$ を値として扱わず、 $x \neq 3$ の範囲で式を変形する。

$$\begin{aligned}\frac{x^2-9}{x-3} &= \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\ &= x+3\end{aligned}$$

この約分は $x \neq 3$ の条件で行っている。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) \\ &= 6\end{aligned}$$

元の関数の除外点 $x = 3$ では値を定めていないが、極限は 6 になる。

練習問題 5 の解答・解説

$x = 2$ での値と、2 へ近づいたときの値を分けて考える。

$x \neq 2$ では $f(x) = x + 4$ なので、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+4) \\ &= 6\end{aligned}$$

一方、定義された値は $f(2) = 10$ である。

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$ 、 $f(2) = 10$ となる。

極限は $x = 2$ そのものの値ではなく、 $x \neq 2$ で 2 の近くにある値から決まる。そのため、 $f(2)$ だけを変えても極限は変化しない。

練習問題 6 の解答・解説

(1) $f(x)$ について、 $x \neq 2$ では、次のように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= x + 2\end{aligned}$$

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ である。

次に、 $g(x)$ について、 $x \neq 2$ では、次のように変形する。

$$\frac{(x - 2)^2}{x - 2} = x - 2$$

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ である。

(2) どちらも $x = 2$ を代入すると分子分母がともに 0 になる形になる。しかし、実際の極限は $f(x)$ では 4、 $g(x)$ では 0 となり異なる。

したがって、分子分母ともに 0 になる形だけを見ても極限の値は決まらず、近づける点の近くでの関数値の変化を調べる必要がある。

練習問題 7 の解答・解説

この 4 つの計算値を見ると、 x が 2 に近づくにつれて $f(x)$ が 4 に近づくように見える。

しかし、有限個の値を調べただけでは、極限を証明したことにはならない。

極限は、 x を 2 へ近づけるすべての変化について考えるものである。4 個の値は予想を立てる材料にはなるが、極限の証明そのものではない。

練習問題 8 の解答・解説

(1) $f(x)$ は 4 を除いた定義域で定められているため、 $f(4)$ へ直接代入して考えることはできない。しかし、4 の近くでは $f(x) = x^2 + 1$ であるため、この多項式の極限を考えることができる。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= 4^2 + 1 \\ &= 17\end{aligned}$$

したがって、極限は 17 である。

(2) $h(x)$ を $x \neq 4$ では $f(x)$ と同じ値、 $h(4) = 100$ と定めると、 h の定義域は全実数になる。

4 へ近づくときの値は、4 以外の近くでの関数値から決まるため、 $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 17$ である。

一方、関数そのものの値は $h(4) = 100$ である。

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 17$ 、 $h(4) = 100$ となる。

このことから、除外点を埋めるように関数値を変更しても、近くの関数値が変わらなければ極限は変化しないことが分かる。