第 192 講 高次導関数

学習目標

この講では、導関数をさらに微分するという考え方を理解し、第 2 次導関数・第 3 次導関数・第 n 次導関数の意味を説明できるようになることを目標とする。
また、必要な回数だけ微分してから値を代入する流れを身につけ、高次導関数の基本計算を正確に行えるようにする。

導関数をもう一度微分する意味

微分は、関数から新しい関数を作る操作である。例えば、関数 $f(x)$ を微分すると導関数 $f'(x)$ が得られる。
ここで、$f'(x)$ もまた x の関数であるため、さらに微分できる場合がある。このとき得られる関数を $f''(x)$ と表し、第 2 次導関数と呼ぶ。
高次導関数で大切なのは、「微分した結果も関数として扱う」という見方である。1 回微分して終わりではなく、必要な回数だけ同じ操作を繰り返す。

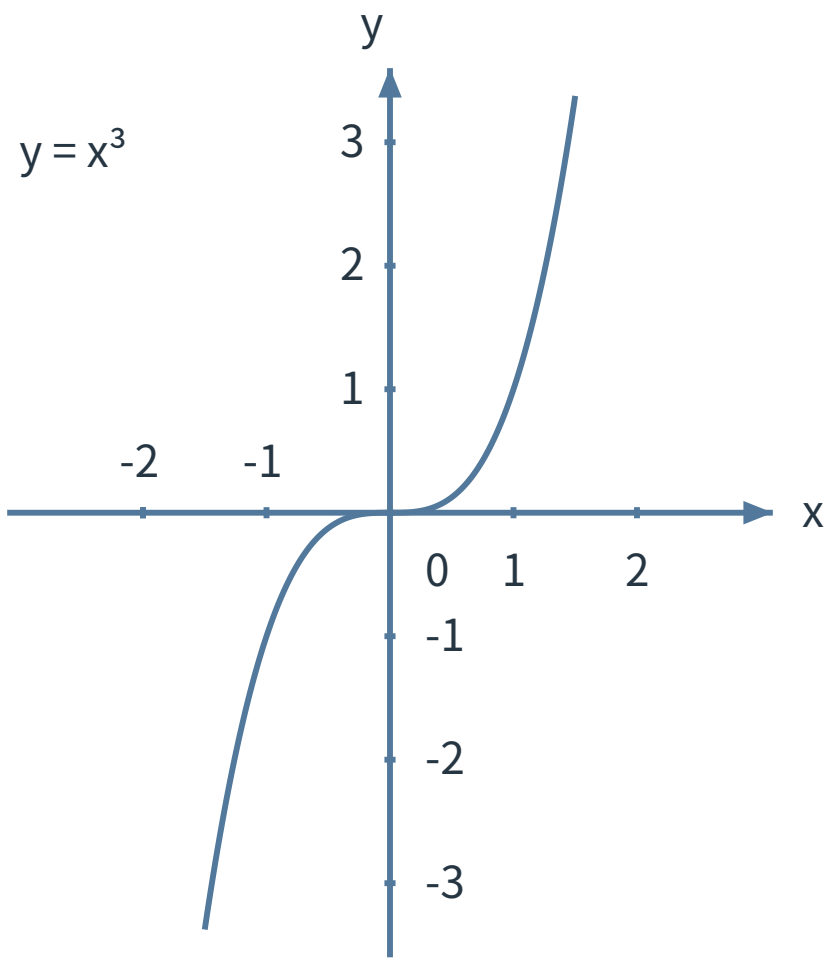

図 1　元の関数 $f(x) = x^3$

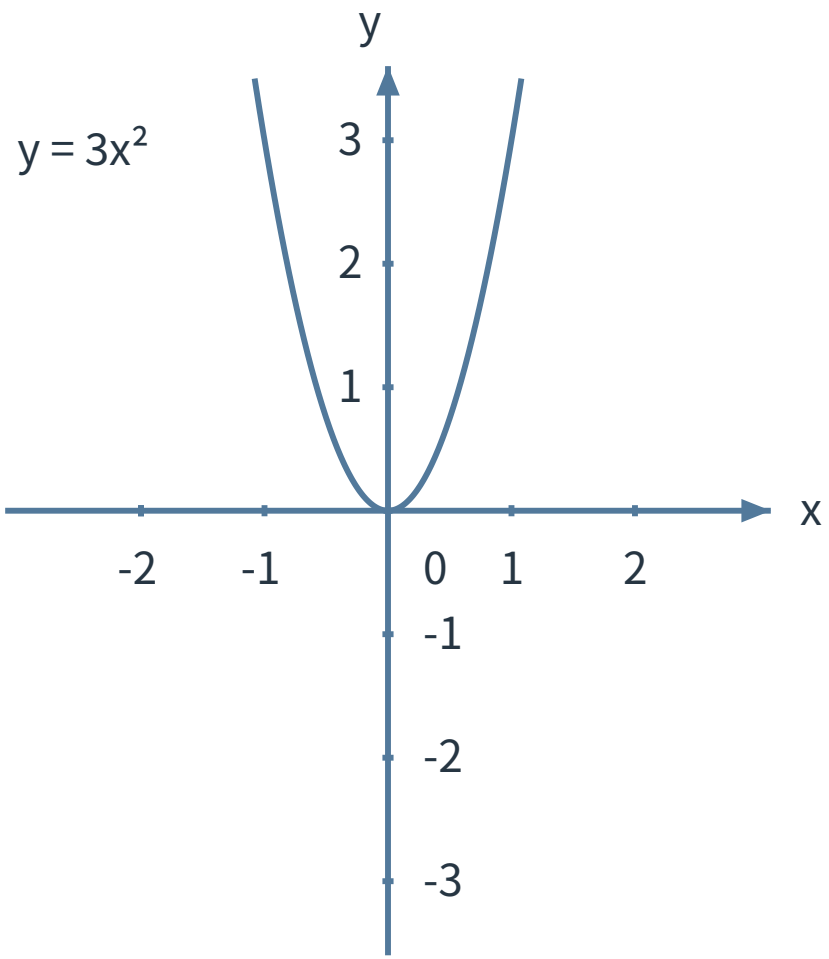

図 2　第 1 次導関数 $f'(x) = 3x^2$

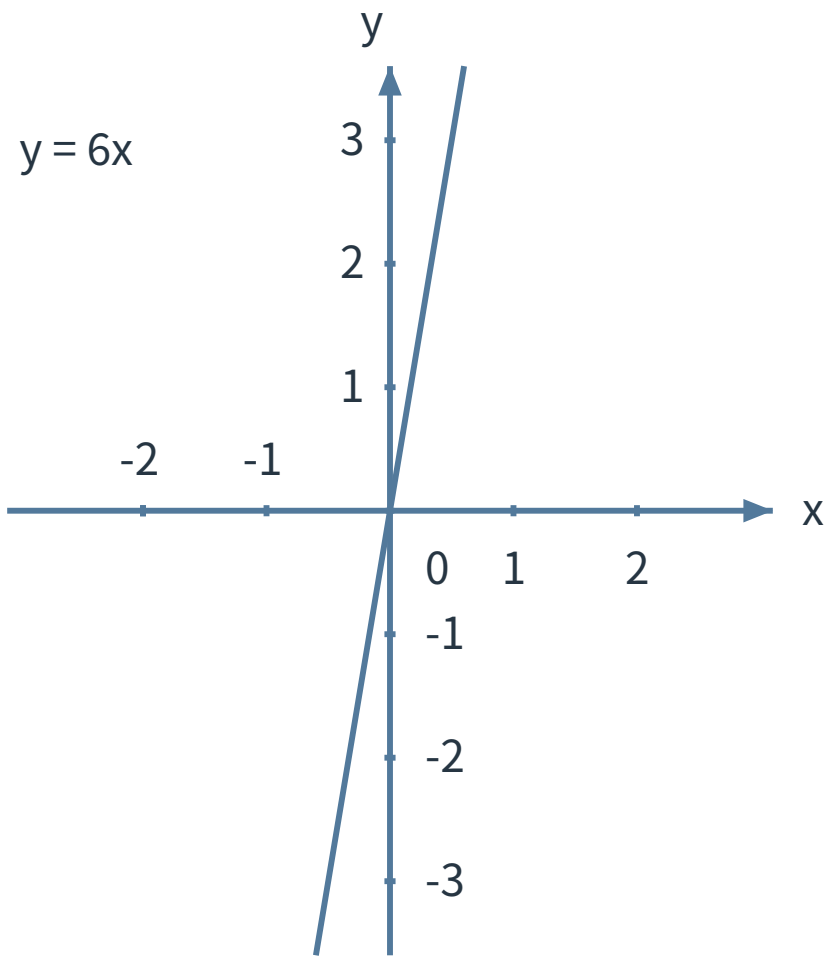

図 3　第 2 次導関数 $f''(x) = 6x$

微分回数と記号

上の 3 図では、元の関数 $f(x) = x^3$、第 1 次導関数 $f'(x) = 3x^2$、第 2 次導関数 $f''(x) = 6x$ を順に比較し、微分することで関数の形が変化していくことを確認する。
今回の $f(x) = x^3$ では、1 回微分すると $f'(x) = 3x^2$、2 回微分すると $f''(x) = 6x$ となり、元の関数と各導関数は互いに異なる。第 3 次導関数は $f'''(x)$、第 4 次導関数は $f^{(4)}(x)$ のように表す。
一般に、n 回微分した導関数を第 n 次導関数と呼び、$f^{(n)}(x)$ と表す。ただし、n は正整数であり、そこまで微分できることが条件である。
また、$f^{(n)}(x)$ の記号は累乗を表しているのではない。$f(x)$ を n 回微分した結果を表す記号であり、$f(x)^n$ とは意味が異なる。

第 n 次導関数

n を正整数とする。実数値関数 f が開区間 I で定義され、f から順に得られる導関数がその区間で必要な回数だけ微分可能であるとき、第 n 次導関数を考えることができる。
導関数を順に定めると、$f^{(1)} = f'$ であり、$1 \leq k < n$ を満たす整数 k について $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$ である。
特に、第 2 次導関数は $f''(x)$、第 3 次導関数は $f'''(x)$ と表す。また、$\frac{d^2y}{dx^2}$ や $\frac{d^ny}{dx^n}$ は分数の通常の二乗や n 乗ではなく、何回微分したかを表す微分回数の記号である。
必要な回数だけ微分できることは自動的に保証されない。
例えば、$f(x) = x\,|\,x\,|$ の導関数は $f'(x) = 2\,|\,x\,|$ である。
しかし、f' は $x = 0$ で微分できない。
導関数 f' の 0 における差商は、左側極限が -2、右側極限が 2 である。この 2 つが一致しないため、$f''(0)$ は存在しない。
本講で扱う三角関数の角はラジアンで表し、$\sin x$ と $\cos x$ は全実数で何回でも微分可能である。

値を代入する順番

高次導関数を求める問題では、必要な回数だけ微分してから値を代入する。
例えば、$f''(2)$ を求める場合は、まず $f(x)$ から $f''(x)$ を求め、その後で $x = 2$ を代入する。
途中の関数へ値を代入すると必要な微分ができないというより、関数式を 1 点の数値だけに置き換えることで、周囲の変化を表す情報が失われるため注意する。

例題 1

関数 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

2 回微分する。
1 回目の微分では、$f'(x) = 4x^3 - 6x$ となる。
2 回目の微分では、$f''(x) = 12x^2 - 6$ となる。
多項式は全実数で微分可能なので、定義域は全実数である。
したがって、第 2 次導関数は $f''(x) = 12x^2 - 6$ である。

例題 2

関数 $f(x) = e^{2x}$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

指数関数の合成の微分を用いる。
1 回目の微分では、内側の関数 $2x$ の微分である 2 を掛けるため、$f'(x) = 2e^{2x}$ となる。
2 回目も、定数係数 2 を残し、内側の関数の微分 2 を掛ける。
したがって、$f''(x) = 2 \cdot 2e^{2x} = 4e^{2x}$ である。
指数関数は全実数で微分可能なので、定義域は全実数である。
したがって、第 2 次導関数は $f''(x) = 4e^{2x}$ である。

©ミライコーチング

例題 3

関数 $f(x) = \sin x + x\cos x$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

積の微分を使って、順番に微分する。
まず、第 1 次導関数を求める。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + \cos x - x\sin x \\ &= 2\cos x - x\sin x \end{aligned}$$

さらに微分する。

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2\sin x - (\sin x + x\cos x) \\ &= -3\sin x - x\cos x \end{aligned}$$

したがって、第 2 次導関数は $f''(x) = -3\sin x - x\cos x$ である。

演習問題

演習問題 1

関数 $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ の第 3 次導関数 $f'''(x)$ を求めなさい。

演習問題 2

関数 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5$ について、$f^{(4)}(x)$ を求めなさい。

演習問題 3

関数 $f(x) = e^{3x}$ の第 3 次導関数 $f'''(x)$ を求めなさい。

演習問題 4

関数 $f(x) = \cos x$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい。

演習問題 5

関数 $f(x) = x\sin x$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい。

演習問題 6

関数 $f(x) = \log x$ について、第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい。ただし、定義域は $x > 0$ とする。
ここで $\log x$ は底 e の自然対数を表す。

©ミライコーチング

演習問題 7

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ について、第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい。ただし、定義域は $x \neq 0$ とする。

演習問題 8

関数 $f(x) = x^3$ について、$f''(2)$ の値を求めなさい。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

3 回微分する。
1 回目の微分では、$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ となる。
2 回目の微分では、$f''(x) = 20x^3 - 12x$ となる。
3 回目の微分では、$f'''(x) = 60x^2 - 12$ となる。
したがって、第 3 次導関数は $f'''(x) = 60x^2 - 12$ である。

演習問題 2 の解答・解説

4 回微分する。
1 回目の微分では、$4x^3 + 6x$ となる。
2 回目の微分では、$12x^2 + 6$ となる。
3 回目の微分では、$24x$ となる。
4 回目の微分では、24 となる。
したがって、$f^{(4)}(x) = 24$ である。
同じ関数をさらに 1 回微分すると定数 24 の微分になるため、$f^{(5)}(x) = 0$ となる。以後も微分結果は 0 である。

演習問題 3 の解答・解説

指数関数の合成の微分を用いる。
1 回目の微分では、内側の関数 $3x$ の微分である 3 を掛けるため、$f'(x) = 3e^{3x}$ となる。
2 回目の微分では、もう一度内側の関数 $3x$ の微分である 3 を掛けるため、$f''(x) = 9e^{3x}$ となる。
3 回目の微分では、さらに 3 を掛けるため、$f'''(x) = 27e^{3x}$ となる。
したがって、第 3 次導関数は $f'''(x) = 27e^{3x}$ である。

演習問題 4 の解答・解説

三角関数を順番に微分する。
1 回目の微分では、$f'(x) = -\sin x$ となる。
2 回目の微分では、$f''(x) = -\cos x$ となる。
3 回目の微分では、$f'''(x) = \sin x$ となる。
4 回目の微分では、$f^{(4)}(x) = \cos x$ となる。
角はラジアンで扱い、$\sin x$ と $\cos x$ は全実数で何回でも微分可能である。したがって、第 4 次導関数は $f^{(4)}(x) = \cos x$ である。

演習問題 5 の解答・解説

積の微分を使って 2 回微分する。
第 1 次導関数は、積の微分を用いると $f'(x) = \sin x + x\cos x$ となる。
第 2 次導関数は、積の微分をもう一度使って次のように求められる。

$$\begin{aligned} f''(x) &= \cos x + (\cos x - x\sin x) \\ &= 2\cos x - x\sin x \end{aligned}$$

したがって、第 2 次導関数は $f''(x) = 2\cos x - x\sin x$ である。

演習問題 6 の解答・解説

この講の $\log x$ は、底が e である自然対数を表す。
定義域は $x > 0$ である。
1 回目の微分では、$f'(x) = \frac{1}{x}$ となる。
2 回目の微分は、商の微分を使うと次のように求められる。

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

したがって、第 2 次導関数は $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ であり、元の関数の定義域は $x > 0$ のままである。

演習問題 7 の解答・解説

定義域は $x \neq 0$ である。
1 回目の微分では、商の微分を使うと $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ となる。
2 回目の微分は、分子が -1、分母が x^2 である商を微分すると次のように求められる。

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{0 \times x^2 - (-1) \times 2x}{x^4} \\ &= \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

したがって、第 2 次導関数は $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ であり、定義域は $x \neq 0$ のままである。

演習問題 8 の解答・解説

必要な回数だけ微分する。
1 回目の微分では、$f'(x) = 3x^2$ となる。
2 回目の微分では、$f''(x) = 6x$ となる。
求める値は $f''(2)$ なので、ここで $x = 2$ を代入する。したがって、$f''(2) = 12$ である。
先に $f(2) = 8$ へ数値化すると、関数ではなく 1 つの値になる。その値をさらに微分しても、高次導関数の値 $f''(2)$ は求められないため注意する。

©ミライコーチング