第 065 講 波の重ね合わせ

この講でできるようになること

- 同じ位置・同じ時刻における二つの波の横変位を、符号付きで加えられる。
- 位置ごとの変位から合成波のグラフを作り、合成変位がゼロになる意味を説明できる。
- 一様・線形・非分散の弦という条件の下で、二つのパルスが重なった後の進み方を判断できる。

1. 一本の弦に二つの波が来たら

左右に張った一本の弦を考える。弦の位置を右向きに増える座標 x で表し、弦の各点が平衡位置から上下にずれた量を横変位 y と呼ぶ。横変位は、弦に沿う x 方向ではなく、それに垂直な上下方向のずれである。上向きを正、下向きを負とする。

同じ弦を進む波 A と波 B が重なっているとき、弦の点が二本に分かれるわけではない。同じ位置・同じ時刻で観測される弦の変位は一つである。波 A だけの場合と波 B だけの場合の横変位を、同じ位置・時刻で足すと、その一つの変位を求められる。

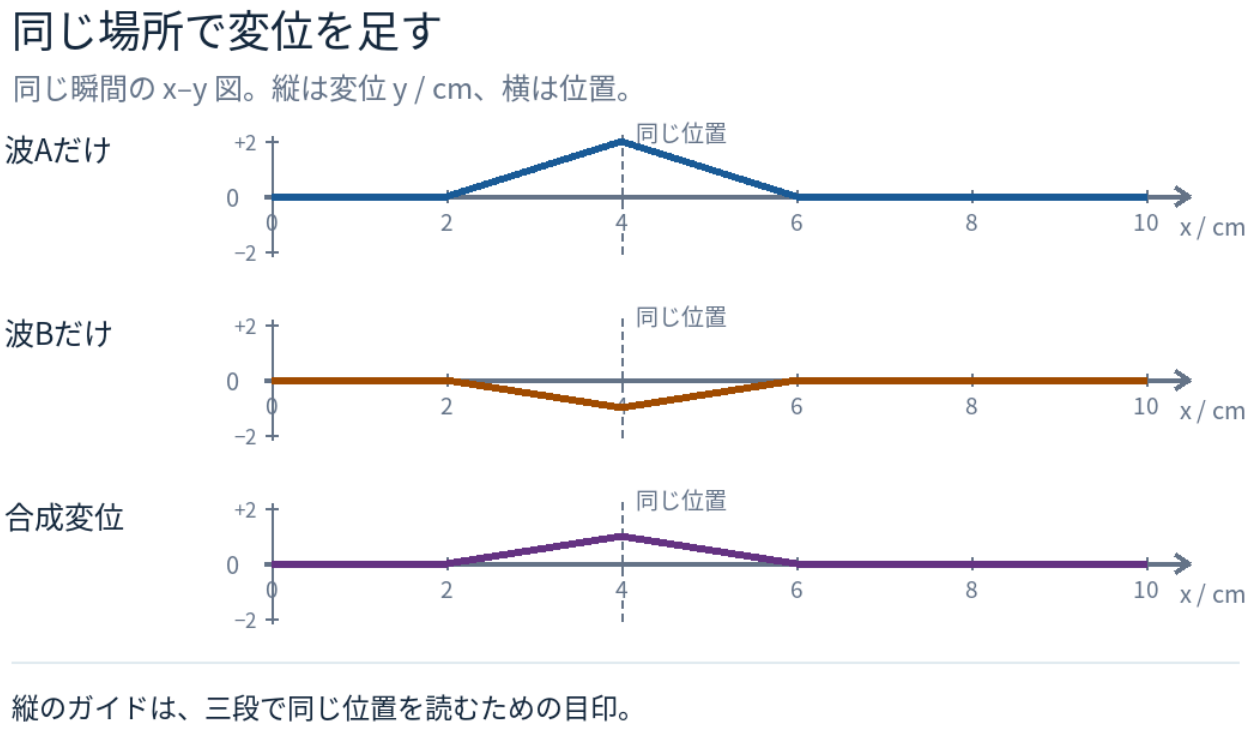


図 1　同じ位置で符号付きの変位を足す。

この図の横軸は位置 x（単位 cm）、縦軸は横変位 y（単位 cm）である。三段は**すべて同じ時刻**の波 A だけ、波 B だけ、合成変位を別々に描いたものであり、時間の経過を表していない。縦のガイドが示す $x = 4\,\mathrm{cm}$ では、A が $+2\,\mathrm{cm}$、B が $-1\,\mathrm{cm}$ なので、実際の弦の変位は $+1\,\mathrm{cm}$ となる。図は計算のための模式図であり、実測値を表さない。

©ミライコーチング

重ね合わせの原理

同じ媒質を伝わる波が線形な範囲で重なるとき、位置 x、時刻 t における合成変位 y は、それぞれの波がその位置・時刻につくる変位 y_1、y_2 の和となる。

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

足すのは、**同じ位置 x、同じ時刻 t の、同じ向きに測った横変位**である。波の速さ、エネルギー、変位の絶対値や各波の振幅を、そのままこの式で足すのではない。

波形を横に並べて、違う位置の山と谷を対応させても正しくない。また、別の時刻の変位を足すこともできない。各波のグラフで同じ x の縦の値を読み、符号を保って足すのが基本となる。

2. 上向きと下向きを区別して足す

二つの変位がともに上向きなら、合成変位はさらに上向きになる。一方、上向きと下向きが重なれば、一方が他方を打ち消すことがある。負の変位どうしなら、合成変位も下向きである。

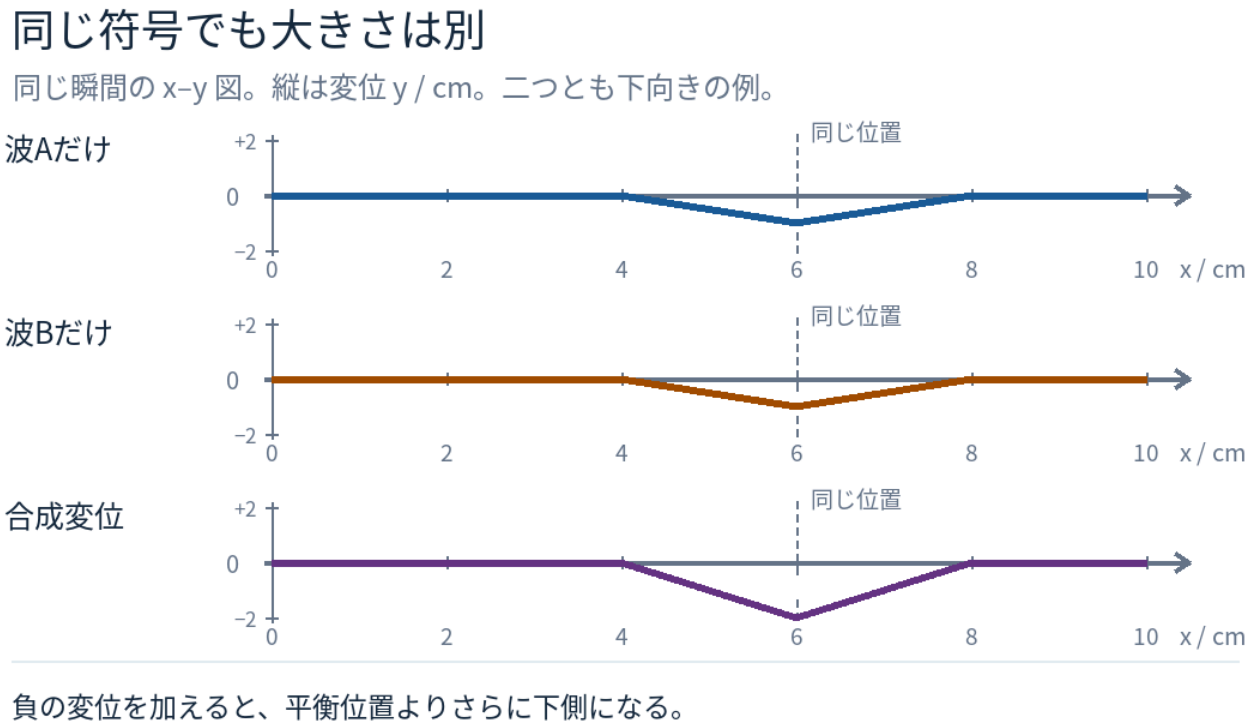


図 2　二つの負の変位を加える。

この図も三段とも同時刻の x–y 図である。横軸 x は位置（cm）、縦軸 y は上下の横変位（cm）を表す。$x = 6\,\mathrm{cm}$ では、A の $-1\,\mathrm{cm}$ と B の $-1\,\mathrm{cm}$ を加え、合成変位は $-2\,\mathrm{cm}$ となる。**符号付きの変位**は $-2\,\mathrm{cm}$、**変位の大きさ**は $2\,\mathrm{cm}$ であり、両者の表現を区別する。

例題 1：同じ位置・時刻の変位

同じ弦のある位置 $x = x_0$、時刻 $t = t_0$ において、上向きを正とする。波 A と波 B がそれぞれつくる横変位が次の値であるとき、合成変位を符号と単位を付けて求めよ。

例題 1(1) A が $+3\,\mathrm{cm}$、B が $+2\,\mathrm{cm}$。

例題 1(2) A が $+3\,\mathrm{cm}$、B が $-5\,\mathrm{cm}$。

例題 1(3) A が $+4\,\mathrm{cm}$、B が $-4\,\mathrm{cm}$。さらに、合成変位がゼロであることは、二つの波がなくなったことを意味するか答えよ。

例題 1(4) A が $-2\,\mathrm{cm}$、B が $-3\,\mathrm{cm}$。合成変位と、その大きさをそれぞれ答えよ。

解答・解説

例題 1(1) 同じ位置・時刻なので、符号を保って加える。

$$y = (+3) + (+2) = +5\,\mathrm{cm}$$

例題 1(2) 下向きの B の変位を負として加える。

$$y = (+3) + (-5) = -2\,\mathrm{cm}$$

合成された弦の点は、平衡位置より $2\,\mathrm{cm}$ 下側にある。

例題 1(3)

$$y = (+4) + (-4) = 0\,\mathrm{cm}$$

この瞬間のこの点で、上下のずれが打ち消されている。ただし、A の $+4\,\mathrm{cm}$ と B の $-4\,\mathrm{cm}$ という成分波まで消滅したわけではない。

例題 1(4)

$$y = (-2) + (-3) = -5\,\mathrm{cm}$$

符号付きの合成変位は $-5\,\mathrm{cm}$、変位の大きさは $5\,\mathrm{cm}$ である。「下向きに $5\,\mathrm{cm}$」と言葉で表してもよい。

合成変位ゼロの読み方

$y = 0$ が表すのは、その位置・時刻で弦の点が平衡位置にあることだけである。$y_1 = 0$、$y_2 = 0$ の場合にも、$y_1 = -y_2$ で両方がゼロではない場合にも、合成変位はゼロになり得る。

3. 合成波のグラフは位置ごとに作る

波形のグラフは、ある一つの時刻に弦の各位置がどれだけ上下にずれているかを表す。横軸 x は位置、縦軸 y は横変位であり、グラフの山が右に移ることと、弦の物質そのものが右へ運ばれることは異なる。

合成波のグラフを描くときは、まず二つの波の同じ時刻のグラフを同じ位置目盛で読む。次に、それぞれの x における縦の値を足し、合成した点を記録する。各波が折点の間で直線であると指定されていれば、二つを足した合成波も、その区間では直線になる。折点や波形がゼロに戻る位置を落とさずにつなぐ。

©ミライコーチング

例題 2：位置ごとの変位を足す

ある時刻 $t = t_1$ の、一本の弦の位置ごとの横変位を次の表に示す。上向きを正とする。表の数値はすべて cm であり、x は位置、y_1 と y_2 は波 A・波 B それぞれの変位である。

位置 x（cm）	1	2	3
A の変位 y_1（cm）	0	$+2$	0
B の変位 y_2（cm）	-1	0	$+1$

例題 2(1) $x = 1, 2, 3\,\mathrm{cm}$ の合成変位を、それぞれ求めよ。

例題 2(2) 表にある三つの位置のうち、合成変位が最も大きい位置を答えよ。また、$x = 1\,\mathrm{cm}$ の A の値と、$x = 3\,\mathrm{cm}$ の B の値を足してその場の合成変位としてはいけない理由を説明せよ。

解答・解説

例題 2(1) 同じ列、すなわち同じ時刻の同じ位置の値を加える。

位置 x（cm）	1	2	3
合成変位 y（cm）	-1	$+2$	$+1$

$x = 1\,\mathrm{cm}$ は $0 + (-1) = -1\,\mathrm{cm}$、$x = 2\,\mathrm{cm}$ は $2 + 0 = +2\,\mathrm{cm}$、$x = 3\,\mathrm{cm}$ は $0 + 1 = +1\,\mathrm{cm}$ である。

例題 2(2) この三点では $x = 2\,\mathrm{cm}$ が最も大きく、合成変位は $+2\,\mathrm{cm}$ である。$x = 1\,\mathrm{cm}$ と $x = 3\,\mathrm{cm}$ は別の弦の点なので、それらの値を足しても、どちらの位置の合成変位にもならない。なお、この表だけでは三点の間の波形は指定されていないため、間の点まで直線で結ぶとは限らない。

4. 重なった後、波はどう進むか

ここからは、**一様・線形・非分散の弦**を考え、観察する範囲で端からの反射などの影響を受けない、理想的なパルスの伝播を扱う。一様とは弦の性質が場所によって変わらないこと、線形とは変位の重ね合わせが成り立つこと、非分散とはここで考える波形をつくる成分が異なる速さに分かれて波形を崩さないことである。さらに、このモデルでは波の減衰を無視し、各パルスの形と速さが保たれるとする。

一つの盛り上がりやくぼみが進む波を**パルス**と呼ぶ。右へ進むパルス A と左へ進むパルス B が出会うと、重なっている間は同じ位置の変位が足し合わされる。しかし、各成分波が相手の波にぶつかって止まったり、相手の進行方向へはね返ったりするわけではない。重なりを過ぎれば、A はもとの右向き、B はもとの左向きに進む。これを波の**独立性**と呼ぶ。

ゼロになったのは何か

正負同形のパルスがちょうど一致すれば、その瞬間の合成変位が全域でゼロになる場合がある。しかし、これは弦の各点の上下方向の速度や、波に伴うエネルギーまでゼロになったことを意味しない。合成変位だけでは運動状態のすべてを決められない。また、現実の弦でも常に減衰や波形の変化がない、と主張しているわけではない。

合成波の計算には「その瞬間の弦の変位を知る」という役割があり、独立性には「出会った波がその後どこへ進むかを判断する」という役割がある。この二つを区別して使うことが重要である。

演習問題

演習 1：符号付き変位を判断する

一本の弦で、同じ位置・時刻における二つの波 A、B の横変位を考える。上向きを正、下向きを負とする。

演習 1(1) A が $-1\,\mathrm{cm}$、B が $+4\,\mathrm{cm}$ のとき、合成変位を求めよ。

演習 1(2) A が $-4\,\mathrm{cm}$、B が $-2\,\mathrm{cm}$ のとき、合成変位とその大きさを求めよ。

演習 1(3) A が $+2\,\mathrm{cm}$、B が $-2\,\mathrm{cm}$ のとき、合成変位を求めよ。また、その結果だけから二つの波が存在しないと判断できるか、理由を付けて答えよ。

解答・解説は巻末「演習 1 符号付き変位を判断する」の解答・解説（q065-01）を参照。

演習 2：部分的に重なる波形を作図する

同じ時刻の、一本の弦を伝わる二つの三角形のパルス A、B を考える。横軸 x は位置（cm）、縦軸 y は横変位（cm）で、上向きを正とする。

A の波形は $(x, y) = (0, 0), (2, +2), (4, 0)$ を折点とし、折点の間を直線で結ぶ。B の波形は $(2, 0), (4, -2), (6, 0)$ を折点とし、折点の間を直線で結ぶ。各パルスの指定された区間の外側では、それぞれの変位はゼロである。

演習 2(1) $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\,\mathrm{cm}$ の各位置について、A と B の横変位を読み取り、合成変位を表にまとめよ。

演習 2(2) 演習 2(1)の結果を用い、横軸を位置 x（cm）、縦軸を合成変位 y（cm）とする合成波形を作図せよ。横軸は 0 から $6\,\mathrm{cm}$ まで $1\,\mathrm{cm}$ 刻み、縦軸は -2 から $+2\,\mathrm{cm}$ まで $1\,\mathrm{cm}$ 刻みで取り、各点を正しく結べ。

演習 2(3) $x = 3\,\mathrm{cm}$ では二つの成分波の変位がそれぞれいくらかを示し、合成変位がゼロになる理由を説明せよ。

解答・解説は巻末「演習 2 部分的に重なる波形を作図する」の解答・解説（q065-02）を参照。

©ミライコーチング

演習 3：打ち消し合うパルスの通過

一様・線形・非分散の弦の、端の影響を受けない区間で、二つの同じ山形の三角パルスを考える。A は上向きの山で右へ、B は同じ形・大きさで下向きの谷となり左へ、それぞれ一定の速さ 1 cm/s で進む。各パルスの変位の大きさの最大値は 2 cm、中心から左右 1 cm 離れた位置で変位がゼロになり、その外側でもゼロである。重なっても形・速さ・進行方向は変わらず、減衰は無視できるとする。

$t = 0\,\mathrm{s}$ における中心位置は A が $x = 2\,\mathrm{cm}$、B が $x = 8\,\mathrm{cm}$ である。位置 x は右向きを正とし、横変位 y は上向きを正とする。

演習 3(1) $t = 3\,\mathrm{s}$ における A と B の中心位置を、それぞれ求めよ。

演習 3(2) $t = 3\,\mathrm{s}$ の合成波形がどうなるか、弦の横変位に注目して説明せよ。

演習 3(3) $t = 5\,\mathrm{s}$ における A と B の中心位置および進行方向を答え、パルスどうしが重なっているか判断せよ。

演習 3(4) 演習 3(2)の瞬間に、弦の各点の上下方向の速度や、波に伴うエネルギーも必ずすべてゼロになるといえるか。合成変位との違いに触れて答えよ。

解答・解説は巻末「演習 3 打ち消し合うパルスの通過」の解答・解説（q065-03）を参照。

演習 4：合成変位ゼロの原因を調べる

同じ弦を伝わる二つの波 A、B の波源がある。ある観測位置 $x = x_0$ で、ある時刻 $t = t_0$ に合成変位 $y = 0$ と観測された。重ね合わせが成り立つ線形な範囲で、波源を個別に作動させても弦の性質などの条件が変わらず、元の観測と対応する位相・時刻を再現できるとする。

演習 4(1) この観測だけから「A も B もこの位置で変位がゼロだった」と断定できるか。異なる二つの組合せを示して説明せよ。

演習 4(2) 「両方とも変位がゼロ」と「一方の上向き変位を他方の下向き変位が打ち消した」を区別するには、波源をどのように作動させ、何を測ればよいか説明せよ。

解答・解説は巻末「演習 4 合成変位ゼロの原因を調べる」の解答・解説（q065-04）を参照。

演習問題の解答・解説

演習 1：符号付き変位を判断する

演習 1(1) 同じ位置・時刻の符号付き変位を加える。

$$y = (-1) + (+4) = +3\,\text{cm}$$

したがって、合成変位は $+3\,\text{cm}$（上向き）である。

演習 1(2)

$$y = (-4) + (-2) = -6\,\text{cm}$$

合成変位は $-6\,\text{cm}$、その大きさは $6\,\text{cm}$ となる。負号は下向きという向きを表す。

演習 1(3)

$$y = (+2) + (-2) = 0\,\text{cm}$$

合成変位はゼロであるが、二つの波が存在しないとは判断できない。この位置・時刻では、ゼロではない二つの変位がちょうど打ち消し合っている。

演習 2：部分的に重なる波形を作図する

演習 2(1) 各折点の間は直線なので、変位は一定の割合で変化する。例えば A は $x = 2\,\mathrm{cm}$ で $+2\,\mathrm{cm}$、$x = 4\,\mathrm{cm}$ で $0\,\mathrm{cm}$ だから、中間の $x = 3\,\mathrm{cm}$ では $+1\,\mathrm{cm}$ である。同じ位置で B の値も読み、加える。

x（cm）	0	1	2	3	4	5	6
A：y_1（cm）	0	+1	+2	+1	0	0	0
B：y_2（cm）	0	0	0	−1	−2	−1	0
合成：y（cm）	0	+1	+2	0	−2	−1	0

演習 2(2) 上の表の合成変位の点を、指定された軸・目盛に置く。$x = 0, 2, 3, 4, 6\,\mathrm{cm}$ を含む折点を順に直線で結ぶ。$x = 3\,\mathrm{cm}$ で $y = 0$ を通り、$x = 4\,\mathrm{cm}$ では $-2\,\mathrm{cm}$ まで下がる形となる。以下は A・B と合成波を同じ時刻・同じ位置目盛で照合した図である。

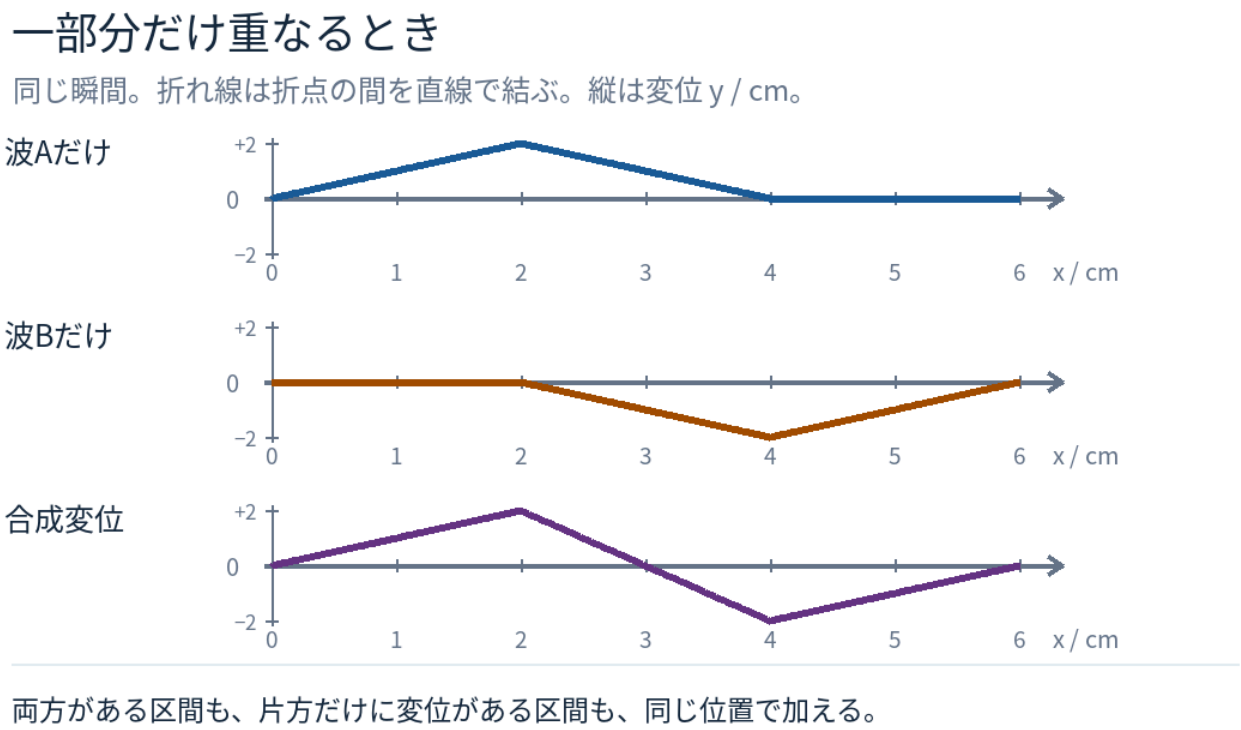


図 3　一部分だけ重なる変位を作図する。

図の横軸は x（cm）、縦軸は y（cm）であり、三段は異なる時刻ではない。$x < 2$ の範囲では B の変位がゼロで、$x > 4$ の範囲では A の変位がゼロである。$x = 2$ から $4\,\mathrm{cm}$ までは同じ位置の A と B の変位を足す。

演習 2(3) $x = 3\,\mathrm{cm}$ では A が $+1\,\mathrm{cm}$、B が $-1\,\mathrm{cm}$ である。したがって $y = +1 + (-1) = 0\,\mathrm{cm}$ となる。両方の波がないのではなく、この点で上下の変位が相殺されている。

演習 3：打ち消し合うパルスの通過

演習 3(1) A は右へ毎秒 1 cm、B は左へ毎秒 1 cm 進む。よって、3 s 後の中心は

$$x_A = 2 + 1 \times 3 = 5\,\mathrm{cm},$$
$$x_B = 8 - 1 \times 3 = 5\,\mathrm{cm}$$

であり、どちらも $x = 5\,\mathrm{cm}$ である。

演習 3(2) 中心が一致し、A と B は各位置で等しい大きさ・逆符号の変位をつくる。したがって重なった範囲のどの位置でも $y_1 + y_2 = 0$ となる。二つのパルスの外側もともに変位がゼロなので、**この瞬間の弦全域の合成変位はゼロ**であり、平衡位置に沿う直線となる。

演習 3(3) 5 s 後の中心は

$$x_A = 2 + 1 \times 5 = 7\,\mathrm{cm},$$
$$x_B = 8 - 1 \times 5 = 3\,\mathrm{cm}$$

となる。各パルスは中心から左右 1 cm の位置とその外側で変位がゼロなので、A の区間は $x = 6$ から 8 cm、B の区間は $x = 2$ から 4 cm であり、重ならない。A は右向き、B は左向きのまま進む。

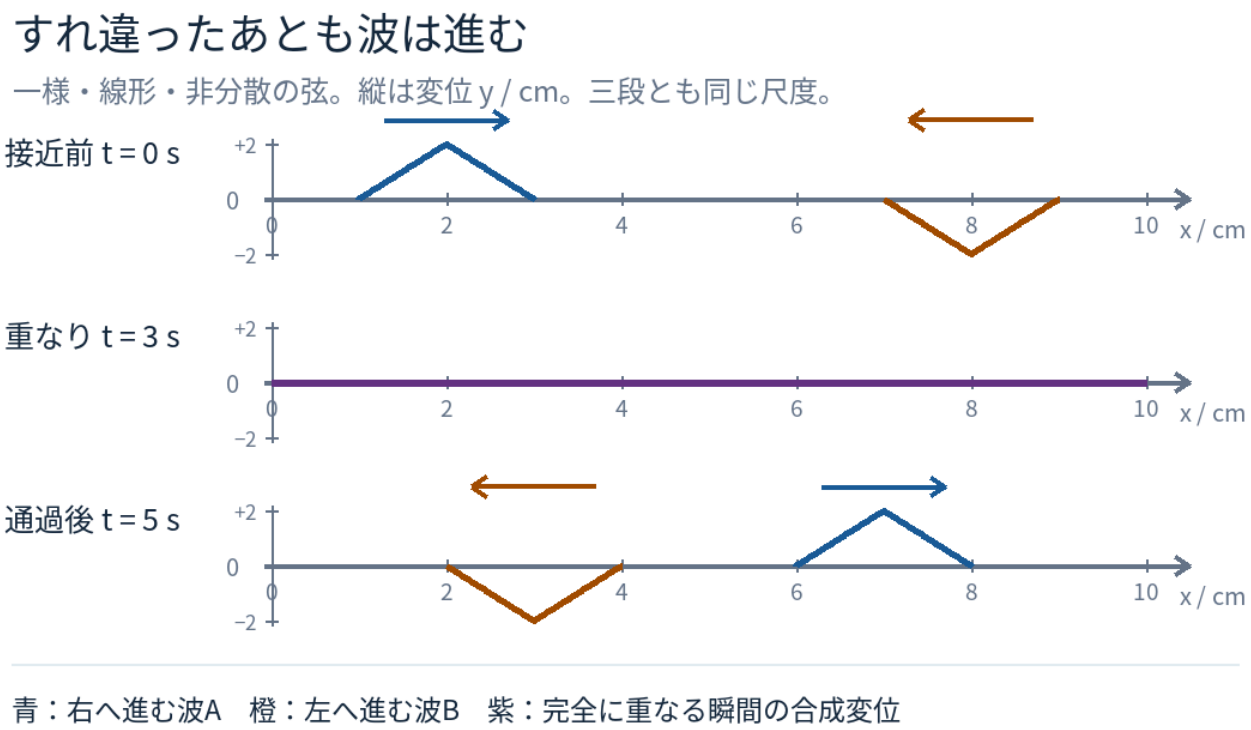


図 4　打ち消し合う瞬間と通過前後。

図の横軸は位置 x（cm）、縦軸は横変位 y（cm）であり、三段とも同じ尺度で、上から $t = 0\,\mathrm{s}$、3 s、5 s を表す。青の進行矢印が A の右向き、橙の矢印が B の左向きである。中央の紫の直線は、成分波がなくなった図ではなく、両波の変位の和がゼロである瞬間を表している。

演習 3(4) 必ずゼロになるとはいえない。演習 3(2)から分かるのは、その瞬間の各点の**上下の位置のずれ**がゼロということだけである。弦の点は平衡位置を通りながら上下に動いていることがあり、運動に伴うエネルギーも存在し得る。理想的なこの条件では、相殺後にもパルスが伝わるので、変位ゼロを波の消滅やエネルギーの消滅と混同してはならない。

演習 4：合成変位ゼロの原因を調べる

演習 4(1) 断定できない。例えば同じ位置・時刻で $y_1 = 0\,\mathrm{cm}$、$y_2 = 0\,\mathrm{cm}$ でも、$y = 0\,\mathrm{cm}$ になる。一方、$y_1 = +3\,\mathrm{cm}$、$y_2 = -3\,\mathrm{cm}$ でも、$y = 0\,\mathrm{cm}$ となる。合成変位だけの観測では、両成分の値は一意に決まらない。

演習 4(2) まず A の波源だけを作動させ、元の観測と対応する位相・時刻における $x = x_0$ の変位を測る。次に B の波源だけを作動させ、同じ条件で同じ位置の変位を測る。両方ともゼロなら第一の可能性を、大きさが等しく符号が反対の、ゼロでない変位が得られれば相殺を確認できる。これは弦の条件が変わらず、二つを重ねたときも線形な和が成り立つことを前提とした調べ方である。

©ミライコーチング