第 187 講 商の微分

学習目標

この講では、商の形で表された関数について、微分できる条件と導関数の求め方を理解することを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- 商の微分公式が成り立つ条件を説明できる。
- 差商から商の微分公式を導ける。
- 分子・分母の関数値と導関数値を区別して、商の微分を計算できる。
- 式を約分した場合でも、もとの関数の定義域を保って考えられる。

商の微分を考える理由

関数の中には、次のような商の形をしたものがある。

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}$$

ただし、定義域は $x\neq 0$ である。
この関数では、分子の x^2+1 だけでなく、分母の x も変化する。そのため、分子だけの変化や分母だけの変化を見るのではなく、分数全体の変化を考える必要がある。
積の微分では、2 つの因子の変化を合わせて考えた。商の微分でも、分子と分母の変化を差商の形で整理することで、分数全体の変化を調べる。
図 1 の実線の曲線は関数 f を表し、水平な実線 t は点 $P(1,2)$ における接線 $y=2$ を表す。表示するのは正の枝の一部だけである。

©ミライコーチング

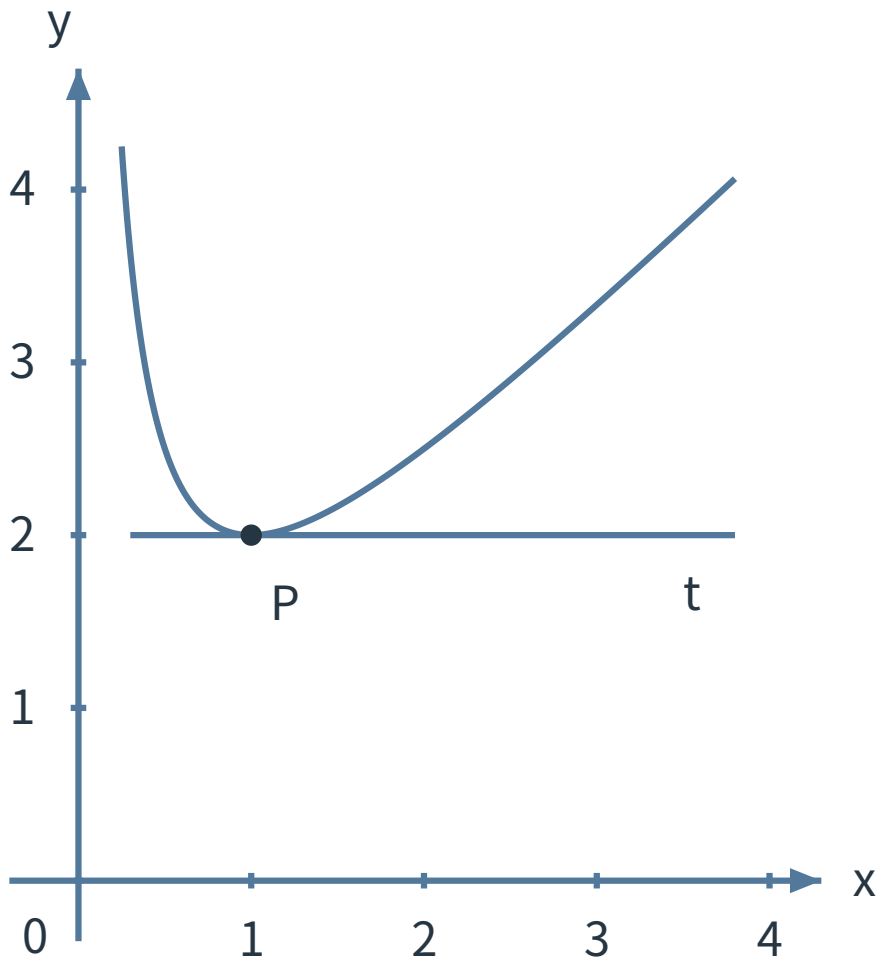

図 1　関数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ の点 $P(1,2)$ と水平接線 $y=2$

例題 1 では、この関数について $f(1)=2$ と $f'(1)=0$ を確認する。
関数の値はその点の高さを表し、微分係数はその点での接線の傾きを表す。商の微分では、この 2 つを区別して扱うことが重要である。

商の微分公式が使える条件

商の微分を考えるため、点 a を含む開区間で定義された実数値関数 u, v を考える。
ここでは、u と v は点 a で微分可能であると仮定する。また、$v(a)\neq 0$ とする。
微分可能な関数は連続であるため、v は a で連続である。したがって、a を含む十分小さい開区間を選ぶと、その区間内のすべての x について次の不等式が成り立つ。

$$|\, v(x)-v(a)\,| < \frac{|\, v(a)\,|}{2}$$

このとき、次の不等式を得る。

$$|\,v(x)\,| \geq |\,v(a)\,| - |\,v(x)-v(a)\,| > \frac{|\,v(a)\,|}{2} > 0$$

したがって、a の近くでは $v(x)$ は 0 にならない。
したがって、点 a の近くでは分母 $v(x)$ は 0 にならず、商 $\frac{u(x)}{v(x)}$ を考えることができる。
この仮定は商の微分公式を導くための十分条件である。u と v が点 a で微分可能であることは、商が点 a で微分可能であるための必要条件ではない。ただし、$v(a) \neq 0$ は商を点 a で定義するために必要であり、この 2 つを区別する必要がある。

差商から商の微分公式を導く

点 a を含む開区間で定義された実数値関数 u, v を考える。u と v は点 a で微分可能であり、$v(a) \neq 0$ とする。
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ とおく。$h \neq 0$ で十分小さく、$a+h$ が分母の非零性を保つ近傍内にある場合を考える。
次の差商を考える。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ を差商へ代入すると、次のように表せる。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a)}}{h}$$

通分すると、次の等式を得る。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a+h)}{h\,v(a+h)v(a)}$$

分子を恒等的に変形すると、次の等式を得る。

$$\begin{aligned} &u(a+h)v(a) - u(a)v(a+h) \\ &= v(a)\{u(a+h)-u(a)\} - u(a)\{v(a+h)-v(a)\} \end{aligned}$$

したがって、次の等式を得る。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{v(a)\frac{u(a+h)-u(a)}{h} - u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}{v(a+h)v(a)}$$

ここで $h \to 0$ とする。
u と v の微分可能性より、それぞれの差商の極限が存在する。

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$$

また、v の連続性より $v(a+h) \to v(a)$ である。
したがって分母の極限は $v(a)^2$ となり、$v(a) \neq 0$ であるため 0 ではない。
以上より、差商の極限は有限な値をもち、f は点 a で微分可能である。
その微分係数は次の値になる。

$$f'(a) = \frac{v(a)u'(a) - u(a)v'(a)}{v(a)^2}$$

両者が微分可能で分母が非零である各点では、次の導関数の公式が成り立つ。

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

差商が接線の傾きへ近づく様子

商の微分公式は、差商が極限でどのような値になるかを見ることで理解できる。
関数 $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ の正の枝について考える。
図 2 の実線の曲線は関数 f のグラフである。水平な実線 t は接線 $y = 2$ を、破線 s は割線 $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ を表す。

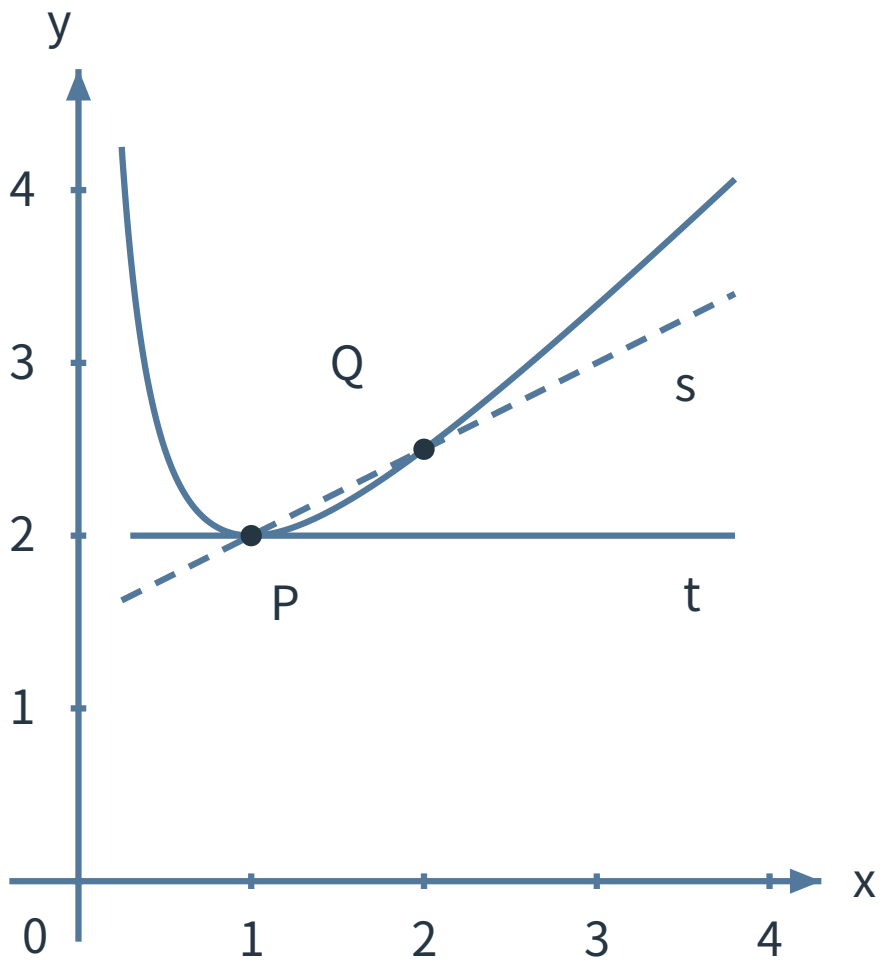

図 2　関数 $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ の点 $P(1, 2)$、点 $Q\left(2, \frac{5}{2}\right)$、割線と接線

点 $P(1,2)$ と点 $Q\left(2,\frac{5}{2}\right)$ を結ぶ割線は、$h=1$ の場合の固定例である。この割線の方程式は $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ である。
一般に $h\neq 0$ かつ $1+h>0$ のとき、点 $x=1+h$ への差商を考える。
差商は次のように計算できる。

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{(1+h)^2+1}{1+h}-2}{h}$$

$$=\frac{h}{1+h}$$

この値は $h\to 0$ のとき 0 へ近づく。したがって、割線の傾きは点 P における接線の傾きへ近づき、$f'(1)=0$ となる。
差商は 2 点を結ぶ直線の傾きであり、微分係数は 1 点での接線の傾きである。この違いを意識すると、商の微分公式の意味を理解しやすい。

商の微分で区別するもの

商の微分では、関数とその導関数を区別する。
u と v は関数を表し、$u(a)$ と $v(a)$ はその点での関数値である。一方、$u'(a)$ と $v'(a)$ はその点での微分係数である。
商の微分公式では、分子は $u'v-uv'$、分母は v^2 となる。
関数値と微分係数を混同せず、それぞれの役割を確認して代入することが重要である。

符号と定義域への注意

商の微分公式では、分子の順序を正しく扱う必要がある。短い式で書くと $u'v-uv'$ である。
この順序を逆にすると符号が反転する。ただし、もとの値が 0 の場合には反転しても同じ値になる場合があるため、結果が必ず変化するとは限らない。
また、式を約分して見た目が簡単になっても、もとの関数の定義域は残る。
関数 $r(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ は $x\neq 1$ で定義する。
この関数は $x\neq 1$ の範囲で $r(x)=x+1$ と表せる。
図 3 の白丸は除外点 $(1,2)$ を表す記号であり、その円周自体は関数のグラフではない。

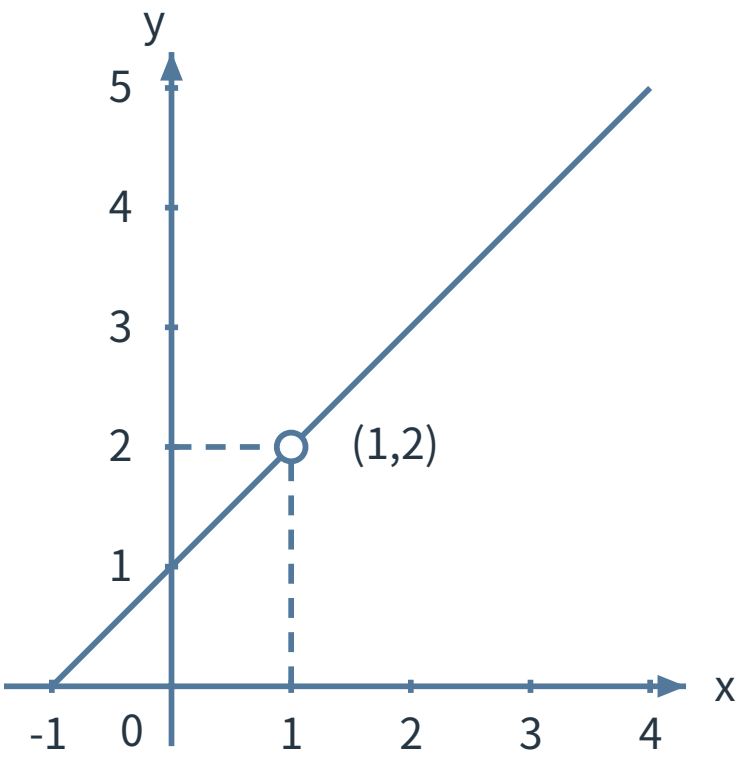

図 3　約分前の関数 $r(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ の除外点 $(1,2)$

しかし、もとの関数では $x=1$ は定義されないため、直線上の点 $(1,2)$ には穴が残る。したがって、$r'(1)$ は存在しない。
一方で、全実数で定義した別の関数 $s(x)=x+1$ では $s'(1)=1$ となる。
約分後の式だけを見るのではなく、どの関数の導関数を求めているかを確認することが必要である。

例題 1

関数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ について、次の問いに答えよ。定義域は $x\neq 0$ である。
(1) 導関数 $f'(x)$ を求めなさい。
(2) $f(1)$ と $f'(1)$ を求めなさい。
(3) 点 $(1,f(1))$ における接線の方程式を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

関数は $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ であり、定義域は $x\neq 0$ である。
(1) 導関数を求める。
分子を $u=x^2+1$、分母を $v=x$ とおく。
$u'=2x$、$v'=1$ である。
商の微分公式を用いると、次のように計算できる。

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$=\frac{(2x)x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{x^2}$$

したがって、導関数は $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$ である。
(2) 関数値と微分係数を求める。
$f(1)=\frac{1^2+1}{1}=2$ であり、$f'(1)=\frac{1^2-1}{1^2}=0$ である。
(3) 接線の方程式を求める。
点 $(1,f(1))=(1,2)$ における接線の傾きは $f'(1)=0$ であるため、接線は水平になる。
したがって、接線の方程式は $y=2$ である。
図 1 では、点 $P(1,2)$ と水平接線 $y=2$ を確認することで、関数値 $f(1)=2$ と微分係数 $f'(1)=0$ が異なる量であることを理解できる。

例題 2

関数 $f(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}$ について、次の問いに答えよ。定義域は $x\neq -1$ である。
(1) 関数値 $f(0)$ を求めなさい。
(2) 微分係数 $f'(0)$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

関数は $f(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}$ であり、定義域は $x\neq -1$ である。
(1) 関数値を求める。
$f(0)=\frac{0^2+2\cdot 0}{0+1}=0$ である。
(2) 微分係数を求める。
分子を $u=x^2+2x$、分母を $v=x+1$ とおく。
$u'=2x+2$、$v'=1$ である。
商の微分公式を用いると、次のように計算できる。

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x+2-x^2-2x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

したがって、$x=0$ における微分係数は $f'(0)=\frac{2}{1}=2$ である。
関数値 $f(0)$ と微分係数 $f'(0)$ は異なる量であり、それぞれの意味を区別することが重要である。

例題 3

関数 $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ について、次の問いに答えよ。定義域は $x\neq 2$ である。導関数を求めよ。
また、約分した後の式だけから判断してはいけない理由を説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

関数は $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ であり、定義域は $x\neq 2$ である。
分子を $u=x^2-4$、分母を $v=x-2$ とおく。
$u'=2x$、$v'=1$ である。
商の微分公式を用いると、次のように計算できる。

$$y'=\frac{2x(x-2)-(x^2-4)\cdot 1}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x-x^2+4}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2}$$

分子は $(x-2)^2$ と同じ形であるため、$x\neq 2$ の範囲では $y'=1$ である。
もとの関数は $x=2$ で定義されない。$x^2-4=(x-2)(x+2)$ なので、$x\neq 2$ では $y=x+2$ と表せるが、約分で定義域は広がらない。
したがって、もとの関数の導関数は $x\neq 2$ の範囲で考え、除外点 $x=2$ を残して扱う必要がある。

©ミライコーチング

演習問題

練習問題 1

関数 $y = \frac{x^2+3x+1}{x}$ を微分しなさい。ただし、定義域は $x \neq 0$ である。

練習問題 2

関数 $y = \frac{2x-1}{3}$ を微分しなさい。ただし、定義域は全実数である。

練習問題 3

関数 $y = \frac{1}{x^2+1}$ を微分しなさい。ただし、定義域は全実数である。

練習問題 4

点 a を含む開区間で定義された実数値関数 u, v を考える。u と v は点 a で微分可能であり、$v(a) \neq 0$ とする。
さらに、$u(a) = 2$、$v(a) = 3$、$u'(a) = 4$、$v'(a) = 1$ とする。
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ とおくとき、$f'(a)$ を求めなさい。

練習問題 5

関数 $y = \frac{x^2-9}{x-3}$ について、次の問いに答えなさい。
(1) もとの関数の定義域を確認しなさい。
(2) 導関数を求めなさい。

練習問題 6

点 a を含む開区間で定義された実数値関数 u, v を考える。u と v は点 a で微分可能であり、$v(a) \neq 0$ とする。
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ とおく。
商の微分公式を導くために、この条件が十分条件となる理由を説明しなさい。
次の点を含めて説明すること。
- $v(a) \neq 0$ から、a の近くで分母が 0 にならないこと。
- 商の差商を変形したとき、各差商の極限が存在すること。
- 差商の有限な極限から、商が微分可能になること。

練習問題 7

関数 $y = \frac{x+1}{x^2+2}$ を微分しなさい。ただし、定義域は全実数である。

©ミライコーチング

練習問題 8

実数全体で定義された関数 u, v を $u(x) = v(x) = 1 + |\,x\,|$ とする。$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ とおく。
次の問いに答えなさい。
(1) $v(x)$ が 0 にならないことを確認し、$f(x)$ を求めなさい。
(2) u と v が $x = 0$ で微分可能か調べなさい。
(3) $f'(0)$ を定義から求めなさい。
(4) 各因子の微分可能性と商の微分公式の条件について説明しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

関数は $y = \frac{x^2+3x+1}{x}$ であり、定義域は $x \neq 0$ である。
分子を $u = x^2 + 3x + 1$、分母を $v = x$ とおく。
$u' = 2x + 3$、$v' = 1$ である。
商の微分公式を用いると、次のように計算できる。

$$y' = \frac{(2x+3)x - (x^2+3x+1)\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 3x - x^2 - 3x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

したがって、定義域 $x \neq 0$ において $y' = \frac{x^2-1}{x^2}$ である。

練習問題 2 の解答・解説

関数は $y = \frac{2x-1}{3}$ であり、定義域は全実数である。
これは定数倍の形であるため、微分すると $y' = \frac{2}{3}$ となる。
商の微分公式で確認する場合、分子を $u = 2x - 1$、分母を $v = 3$ とおく。
$u' = 2$、$v' = 0$ である。
商の微分公式を用いると、次のように計算できる。

$$y' = \frac{2\cdot 3 - (2x-1)\cdot 0}{3^2}$$

$$= \frac{6}{9}$$

$$= \frac{2}{3}$$

分母 $v^2 = 9$ は 0 ではないため、定数倍として求めた結果と一致する。

練習問題 3 の解答・解説

関数は $y = \frac{1}{x^2+1}$ であり、定義域は全実数である。
分子を $u = 1$、分母を $v = x^2 + 1$ とおく。
$u' = 0$、$v' = 2x$ である。
商の微分公式を用いると、次のように計算できる。

$$y' = \frac{0 \cdot (x^2+1) - 1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

したがって、全実数で $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ である。

練習問題 4 の解答・解説

点 a を含む開区間で定義された実数値関数について、$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ とする。
商の微分公式より、$f'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v(a)^2}$ である。
与えられた値は $u(a) = 2$、$v(a) = 3$、$u'(a) = 4$、$v'(a) = 1$ である。
これらを代入すると、次のように計算できる。

$$f'(a) = \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 1}{3^2}$$

$$= \frac{12 - 2}{9}$$

$$= \frac{10}{9}$$

したがって、$f'(a) = \frac{10}{9}$ である。

練習問題 5 の解答・解説

関数は $y = \frac{x^2-9}{x-3}$ であり、分母が 0 にならないため定義域は $x \neq 3$ である。
(1) もとの関数の定義域を確認する。
分母が 0 になる $x = 3$ は定義域に含まれないため、定義域は $x \neq 3$ である。
(2) 導関数を求める。
分子を $u = x^2 - 9$、分母を $v = x - 3$ とおく。
$u' = 2x$、$v' = 1$ である。
商の微分公式を用いると、次のように計算できる。

$$y' = \frac{2x(x-3) - (x^2-9) \cdot 1}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - x^2 + 9}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-3)^2}$$

分子は $(x-3)^2$ と等しいため、$x \neq 3$ の範囲で $y' = 1$ である。
また、$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ であるため、$x \neq 3$ の範囲では約分して $y = x + 3$ と表せる。ただし、もとの関数では $x = 3$ は除外される。

©ミライコーチング

練習問題 6 の解答・解説

u と v が点 a で微分可能であることから、v は点 a で連続である。
また、$v(a) \neq 0$ であるため、a を含む十分小さい近傍では分母 $v(x)$ が 0 にならない。
u と v の点 a での微分可能性、および $v(a) \neq 0$ という条件から、$h \neq 0$ で十分小さく、$a+h$ が非零分母の近傍内にある場合を考える。次の差商を考える。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a)}}{h}$$

通分して整理すると、次のように変形できる。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a+h)}{h\,v(a+h)v(a)}$$

$$= \frac{v(a)\frac{u(a+h)-u(a)}{h} - u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}{v(a+h)v(a)}$$

$h \to 0$ とすると、u と v の微分可能性により 2 つの差商は有限な極限をもつ。
さらに、v の連続性より分母は $v(a)^2$ に近づき、$v(a) \neq 0$ であるため 0 ではない。
したがって、商の差商は有限な極限をもち、f は点 a で微分可能になる。
以上の仮定から商の微分可能性が示された。分子と分母それぞれの微分可能性は十分条件であって必要条件ではないが、分母の値が非零であることは、その点で商を定義するために必要である。

練習問題 7 の解答・解説

関数は $y = \frac{x+1}{x^2+2}$ であり、定義域は全実数である。
分子を $u = x+1$、分母を $v = x^2+2$ とおく。
$u' = 1$、$v' = 2x$ である。
商の微分公式を用いると、次のように計算できる。

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2+2) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+2-2x^2-2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2)^2}$$

したがって、全実数で $y' = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2)^2}$ である。

練習問題 8 の解答・解説

(1) $v(x) = 1 + |\,x\,|$ であるため、すべての実数 x で $v(x) \geq 1 > 0$ となる。したがって、$v(x)$ は 0 にならない。
また、$u(x) = v(x)$ であるから、$f(x) = 1$ である。
(2) u と v の $x = 0$ における微分可能性を調べる。
$h \neq 0$ として、0 に近づける差商を考える。

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} = \frac{1 + |\,h\,| - 1}{h} = \frac{|\,h\,|}{h}$$

$h > 0$ のとき、この値は 1 であり、$h < 0$ のとき、この値は -1 である。
左右から近づけた差商の極限が一致しないため、u は $x = 0$ で微分不可能である。
v も u と同じ関数であるため、v も $x = 0$ で微分不可能である。
(3) 微分係数の定義による差商を考える。

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1 - 1}{h} = 0$$

したがって、$h \to 0$ のとき差商の極限は 0 であり、$f'(0) = 0$ である。
(4) この例では、u と v は 0 で微分不可能であるが、商 f は 0 で微分可能である。したがって、分母が点で非零であり、各因子が点で微分可能であることは商の微分可能性を保証する十分条件であるが、必要条件ではない。なお、$v(0) \neq 0$ は商をその点で定義するために必要である。