

第 136 講 定積分と面積

学習目標

- ・ 曲線と x 軸で囲まれる面積を、関数の符号を確認して定積分で求められる。
- ・ 符号付きの定積分と、実際の図形のア積の違いを説明できる。
- ・ 区間内で符号が変わる場合に、零点で区切って面積を求められる。

定積分で表す面積

a, b を実数とし、 $a < b$ とする。この講では、多項式関数 $f(x)$ について、閉区間 $a \leq x \leq b$ で曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、必要に応じて垂直境界 $x = a$ 、 $x = b$ によって囲まれる領域のア積を考える。関数が区間全体で x 軸の上側にある場合、つまり $f(x) \geq 0$ なら、その領域のア積 S は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

で表される。

反対に、関数が区間全体で x 軸の下側にある場合、つまり $f(x) \leq 0$ なら、ア積は

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

で表される。

ただし、 $f(x) = 0$ が区間全体で成り立つ場合は、曲線と x 軸の間の高さがすべて 0 であるため、ア積は 0 である。ア積は常に非負であり、定積分の値が負または 0 になる場合でも、図形としてのア積は 0 以上の値として扱う。

なぜ定積分が面積になるのか

ここでは $f(x) \geq 0$ を仮定し、曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、 $x = a$ 、 $x = b$ で囲まれる上側の領域のア積を考える。

a から x までのア積をためた関数を $A(x)$ とする。このとき、出発点ではまだア積がないので、

$$A(a) = 0$$

である。

x から小さい幅 h だけ右へ進んだとき、増える細い部分のア積は、横幅が h 、高さがおおよそ $f(x)$ であるため、

$$A(x+h) - A(x) \approx f(x)h$$

と考えられる。

幅 h を限りなく小さくすると、ア積の増加の割合は高さ $f(x)$ に近づく。そのため、

$$A'(x) = f(x)$$

となる。

第 135 講では、 $A' = f$ かつ $A(a) = 0$ を満たす関数が

$$\int_a^x f(t) dt$$

で表されることを学んだ。したがって、 $x = b$ までためた面積は

$$S = A(b) = \int_a^b f(x) dx$$

となる。

一方、曲線が x 軸の下側にある場合は、高さを $-f(x)$ と考えると上側の面積と同じ考え方が使える。そのため、

$$S = \int_a^b (-f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

となる。

面積を求める判断手順

面積を求めるときは、まず関数の符号を確認する。

1. 区間全体で $f(x) = 0$ なら、曲線は x 軸上にあり、面積は $S = 0$ である。
2. それ以外の多項式では、区間内の零点 $f(x) = 0$ を求める。
3. 零点で区間を分け、それぞれの区間で符号を確認する。符号は、因数分解した形や零点の位置から判断する。
4. x 軸の下側にある部分は符号を反転し、それぞれの面積を足し合わせる。

零点があるから必ず符号が変化するとは限らない。グラフが x 軸に接するだけの零点では、前後で符号が変わらない場合がある。そのため、零点の個数だけでなく、各区間の符号を確認する必要がある。

符号付き定積分との違い

$a < b$ の区間で、曲線と x 軸で囲まれる部分を考える。

定積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

は、上側の面積を正、下側の面積を負として考えた値である。つまり、
符号付き定積分＝上側の面積－下側の面積
となる。

一方、図形として求める総面積は、上側と下側をどちらも非負の量として足したものである。

総面積＝上側の面積＋下側の面積

である。

そのため、区間内で符号が変化する場合には、

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

と最後に絶対値を取るだけでは、一般に総面積を求めることはできない。符号が変化する位置で区間を分け、それぞれの面積を求めて足す必要がある。

例題 1

$y = x^2$ 、 $x = 0$ 、 $x = 2$ 、 x 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

区間は $0 \leq x \leq 2$ である。

区間 $0 \leq x \leq 2$ では $x^2 \geq 0$ であり、 $x = 0$ では x 軸上にあり、 $0 < x \leq 2$ では x 軸の上側にある。したがって、区間全体で $f(x) = x^2$ は x 軸以上であり、面積はそのまま定積分で求められる。

$$S = \int_0^2 x^2 dx$$

原始関数は $\frac{x^3}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

したがって、求める面積は $\frac{8}{3}$ である。

この問題では、関数が区間全体で x 軸以上にあるため、符号を変える必要がなく、定積分の値がそのまま面積になる。

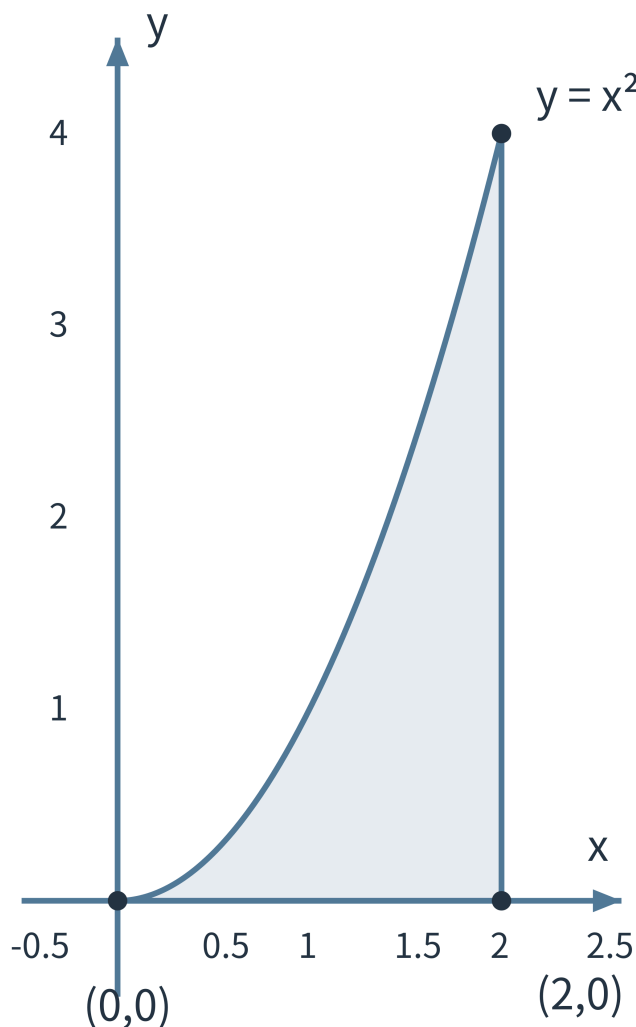


図1 $0 \leq x \leq 2$ における $y = x^2$ と x 軸の間の領域を示す。

例題 2

$y = x^2 - 1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

まず x 軸との交点を求める。

$$x^2 - 1 = 0$$

より、

$$x = -1, 1$$

である。

区間 $-1 \leq x \leq 1$ では、 $x^2 \leq 1$ であるため、

$$x^2 - 1 \leq 0$$

が成り立つ。さらに、区間の内部では $x^2 < 1$ なので $x^2 - 1 < 0$ となり、端点 $x = -1, 1$ では $x^2 - 1 = 0$ である。したがって、この区間全体でグラフは x 軸以下にあり、内部では下側にあると分かる。1 点 $x = 0$ の値だけから全区間の符号を決めるのではなく、区間全体の範囲から符号を確認する必要がある。

そのため定積分の値は負になるが、面積は正の値で求める必要がある。したがって符号を反転する。

$$S = - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$$

計算すると、

$$\begin{aligned} S &= - \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 \\ &= - \left(\left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right) \\ &= - \left(-\frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{4}{3}$ である。

ここで重要なのは、定積分の結果が負になること自体は間違いではないという点である。定積分は符号付きの量であり、面積を求める場合には図形の上下関係に合わせて符号を調整する。

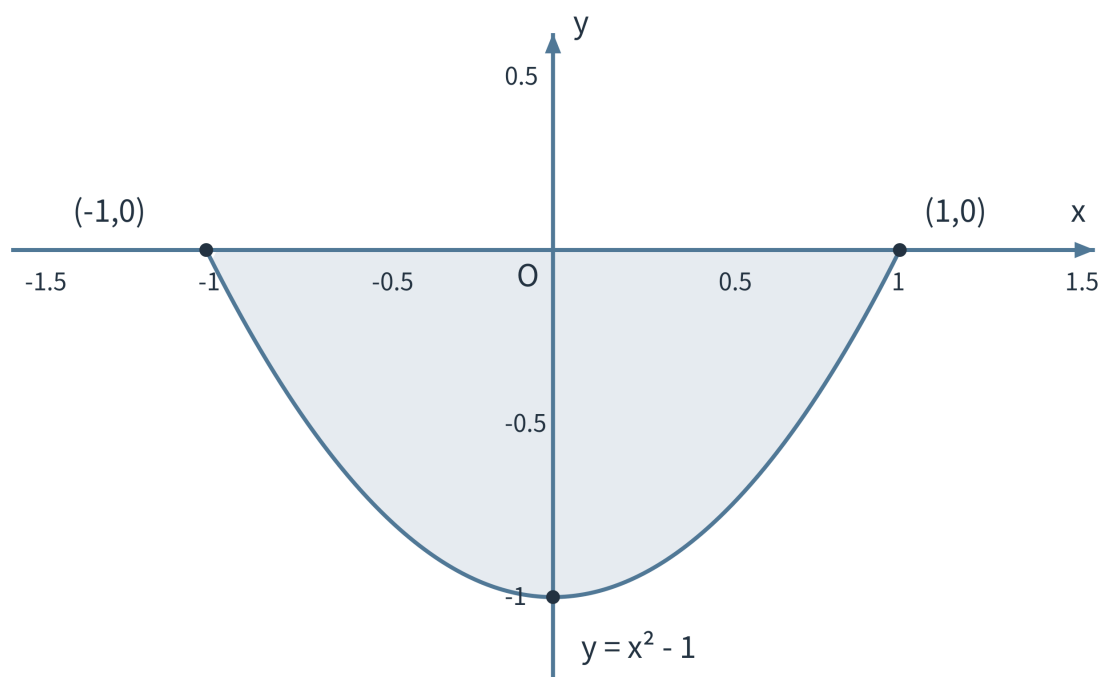


図2 $-1 \leq x \leq 1$ における $y = x^2 - 1$ と x 軸の間の領域を示す。

例題 3

$y = x$ 、 $x = -1$ 、 $x = 2$ 、 x 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい。また、同じ区間での定積分の値と比較しなさい。

例題 3 の解答・解説

直線 $y = x$ は $x = 0$ で x 軸と交わる。

したがって、区間を

$$[-1, 0], \quad [0, 2]$$

に分けて考える。

$-1 \leq x \leq 0$ では $x \leq 0$ なのでグラフは x 軸の下側にあり、面積は

$$-\int_{-1}^0 x \, dx$$

である。

$0 \leq x \leq 2$ では $x \geq 0$ なのでグラフは x 軸の上側にあり、面積は

$$\int_0^2 x \, dx$$

である。

したがって、全体の面積は

$$\begin{aligned} S &= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

一方、符号付きの定積分は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 \\ &= 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

面積は $\frac{5}{2}$ 、定積分は $\frac{3}{2}$ となり一致しない。

最後に絶対値を取って

$$\left| \int_{-1}^2 x \, dx \right| = \frac{3}{2}$$

としても、下側の三角形の面積が上側の面積と打ち消された後の値であるため、総面積にはならない。

面積を求めるときは、符号が変化する場所で区切り、それぞれの面積を足すことが必要である。

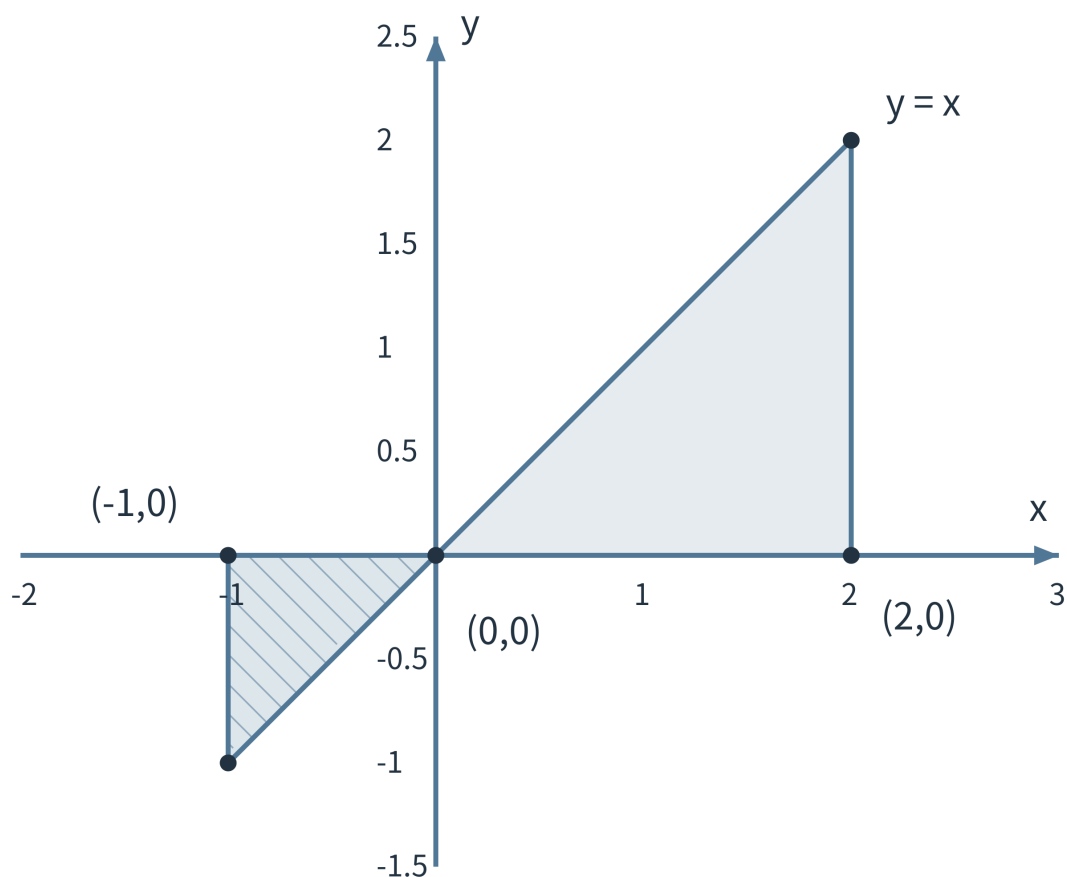


図3 $y = x$ と x 軸の間で、 $-1 \leq x \leq 0$ を斜線、 $0 \leq x \leq 2$ を淡い塗りで示す。

練習問題 1

関数 $f(x) = x^2 + 1$ について、区間 $0 \leq x \leq 2$ で曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、 $x = 0$ 、 $x = 2$ で囲まれる面積を求めなさい。

練習問題 2

関数 $f(x) = x^2 - 4$ について、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい。

練習問題 3

関数 $f(x) = x(x-1)(x-2)$ について、区間 $0 \leq x \leq 2$ で曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、 $x = 0$ 、 $x = 2$ で囲まれる部分の面積を求めなさい。

練習問題 4

関数 $f(x) = x^2(x-1)$ について、区間 $0 \leq x \leq 1$ で曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい。

練習問題 5

関数 $f(x) = x^3 - x$ について、区間 $-1 \leq x \leq 1$ で曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、 $x = -1$ 、 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を求めなさい。

練習問題 6

関数 $f(x) = x^2(x - 1)^2$ について、区間 $0 \leq x \leq 1$ で曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい。

練習問題 7

関数 $f(x) = x$ について、区間 $-2 \leq x \leq 2$ で符号付きの定積分と図形としての面積をそれぞれ求め、違いを説明しなさい。

練習問題 8

関数 $f(x) = 0$ について、区間 $-3 \leq x \leq 4$ で曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、垂直境界 $x = -3$ 、 $x = 4$ で囲まれる部分の面積を求めなさい。

練習問題 1 の解答・解説

区間 $0 \leq x \leq 2$ で $f(x) = x^2 + 1$ の符号を調べる。

$x^2 \geq 0$ より、常に $x^2 + 1 > 0$ であるため、曲線は区間全体で x 軸の上側にある。

したがって、面積は

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1) dx$$

で求められる。

原始関数は $\frac{x^3}{3} + x$ である。

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - 0 \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{14}{3}$ である。

練習問題 2 の解答・解説

x 軸との交点を求める。

$$x^2 - 4 = 0$$

より、

$$x = -2, 2$$

である。

また、

$$f(x) = (x - 2)(x + 2)$$

と因数分解できる。

区間 $-2 < x < 2$ では、例えば $x = 0$ を代入すると負になる。しかし、これは 1 点だけで判断したのではなく、零点が $-2, 2$ 以外に存在せず、二次関数の符号が零点の間で一定であることから、この区間全体で下側にあると分かる。

したがって、

$$S = - \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx$$

である。

$$\begin{aligned} S &= - \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 \\ &= - \left(\left(\frac{8}{3} - 8 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) \right) \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{32}{3}$ である。

練習問題 3 の解答・解説

関数を因数分解した形で確認する。

$$f(x) = x(x - 1)(x - 2)$$

より、零点は $x = 0, 1, 2$ である。

区間 $0 < x < 1$ では、 $x > 0$ 、 $x - 1 < 0$ 、 $x - 2 < 0$ なので $f(x) > 0$ である。

区間 $1 < x < 2$ では、 $x > 0$ 、 $x - 1 > 0$ 、 $x - 2 < 0$ なので $f(x) < 0$ である。

したがって、面積は 2 つの区間に分けて考える。

$$S = \int_0^1 x(x - 1)(x - 2) dx - \int_1^2 x(x - 1)(x - 2) dx$$

展開すると、

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

であり、原始関数を

$$P(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

とおく。
左側の定積分は、

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= [P(x)]_0^1 \\ &= P(1) - P(0) \\ &= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 0 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。
右側の定積分は、

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x) dx &= [P(x)]_1^2 \\ &= P(2) - P(1) \\ &= (4 - 8 + 4) - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。右側は x 軸の下側にあるため、面積では符号を反転する。
したがって、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

因数分解された形から零点を確認する。

$$f(x) = x^2(x - 1)$$

より、零点は $x = 0, 1$ である。

$x = 0$ は二重の零点であり、接しているだけである。したがって、ここで符号は変化しない。

区間 $0 < x < 1$ では $x^2 > 0$ 、 $x - 1 < 0$ なので、

$$f(x) < 0$$

である。

したがって、

$$S = - \int_0^1 x^2(x - 1) dx$$

となる。

展開すると、

$$x^2(x - 1) = x^3 - x^2$$

である。

$$\begin{aligned} S &= - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{1}{12}$ である。

零点があるだけで符号が必ず変化すると考えてはいけない。接する零点では区間ごとの符号確認が必要である。

練習問題 5 の解答・解説

因数分解すると、

$$f(x) = x(x - 1)(x + 1)$$

である。

零点は $x = -1, 0, 1$ である。

$-1 < x < 0$ では、 $x < 0$ 、 $x - 1 < 0$ 、 $x + 1 > 0$ なので $f(x) > 0$ である。

$0 < x < 1$ では、 $x > 0$ 、 $x - 1 < 0$ 、 $x + 1 > 0$ なので $f(x) < 0$ である。

したがって、

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx$$

である。

原始関数を

$$P(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

とおく。

まず左側の定積分を求める。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx &= [P(x)]_{-1}^0 \\ &= P(0) - P(-1) \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

次に右側の定積分を求める。

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^3 - x) dx &= [P(x)]_0^1 \\ &= P(1) - P(0) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - 0 \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

ここで、

$$P(-1) = P(1) = -\frac{1}{4}, \quad P(0) = 0$$

であるため、左右の定積分の大きさが等しく、面積は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

一方、符号付きの定積分は、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx &= [P(x)]_{-1}^1 \\ &= P(1) - P(-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

である。

したがって、面積は $\frac{1}{2}$ 、符号付きの定積分は0となる。

練習問題 6 の解答・解説

関数は

$$f(x) = x^2(x-1)^2$$

である。

平方の積なので、

$$x^2(x-1)^2 \geq 0$$

が常に成り立つ。

したがって、曲線は区間全体で x 軸の上側または接している。面積はそのまま積分できる。

$$S = \int_0^1 x^2(x-1)^2 dx$$

展開すると、

$$x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

である。

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{1}{30}$ である。

零点 $x = 0, 1$ は存在するが、どちらも接する零点であり符号は変化しない。

練習問題 7 の解答・解説

直線 $y = x$ は $x = 0$ で x 軸と交わる。

区間を $[-2, 0]$ と $[0, 2]$ に分ける。

左側では下側、右側では上側になるため、

$$S = - \int_{-2}^0 x \, dx + \int_0^2 x \, dx$$

である。

$$\begin{aligned} S &= - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

一方、符号付きの定積分は、

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

最後に絶対値を取っても $|0| = 0$ であり、面積4にはならない。符号が変わる区間では、積分後に絶対値を取るのではなく、区間を分けて面積を足す必要がある。

練習問題 8 の解答・解説

関数は

$$f(x) = 0$$

である。

曲線 $y = 0$ は x 軸そのものであり、上下方向の高さがどの場所でも 0 である。

したがって、

$$S = \int_{-3}^4 0 \, dx$$

である。

$$\begin{aligned} S &= [0]_{-3}^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、面積は0である。

今回のように全区間で曲線と x 軸の間の高さが0なら、面積は0である。