第 263 講 離散グラフで関係を表す

学習目標

- 対象を頂点、対象間の関係を辺として表せる。
- 隣接、次数、有向辺の意味を図と辺集合から読み取れる。
- 頂点の配置に惑わされず、関係を保つ二つのグラフを同じ構造として捉えられる。

1. 離散グラフは「関係」の図である

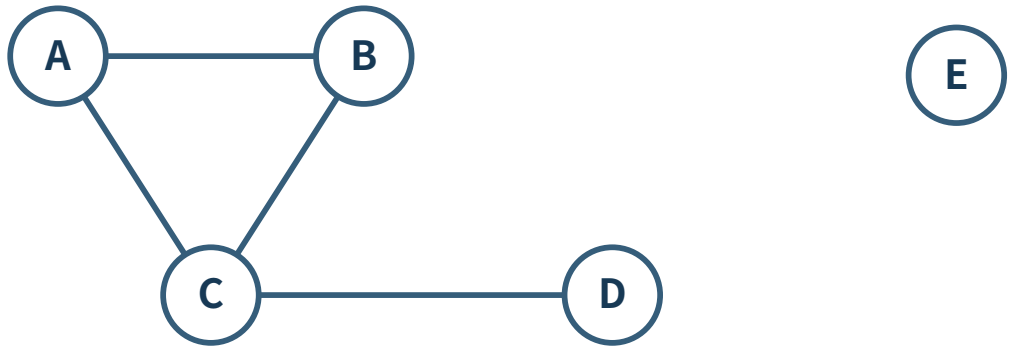
離散グラフとは、いくつかの対象と、その間にある関係を図で表したものである。対象を**頂点**、関係を**辺**という。ここでいうグラフは、関数のグラフや統計グラフとは役割が異なる。座標や数量の変化を表すのではなく、「どれとどれが関係しているか」を表すのである。
本講では、特に断らない限り、辺に向きがなく、同じ 2 頂点を結ぶ辺は 1 本までで、頂点自身へ戻る辺をもたない**単純グラフ**を扱う。辺の長さ、傾き、曲がり方、頂点の位置には意味をもたせない。また、2 本の辺が途中で交差しても、交点に点と名前が明示されていなければ、そこは頂点ではない。

頂点集合と辺集合

頂点の集合を V、辺の集合を E と書く。頂点 A と B を結ぶ向きのない辺は $\{A, B\}$ と表す。例えば

$$V = \{A, B, C, D, E\}, \quad E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{C, D\}\}$$

なら、A、B、C は互いに結ばれ、C と D も結ばれている。E はどの辺にもつながっていない。



この図で A と B のように 1 本の辺で結ばれた 2 頂点を**隣接している**という。ある頂点につながる辺の本数を、その頂点の**次数**という。したがって次数は、A が 2、B が 2、C が 3、D が 1、E が 0 である。E のように次数が 0 の頂点を孤立頂点という。

©ミライコーチング

図を読む順序

1. 頂点が何を表すかを確認する。
2. 辺がどの関係を表すかを確認する。
3. 向きの有無を確認する。
4. 辺の端点を 1 本ずつ読み、隣接関係や次数を調べる。

例題 1：頂点、辺、次数

上のグラフについて答えよ。
(1) C に隣接する頂点をすべて答えよ。
(2) 各頂点の次数の和を求め、辺の本数との関係を述べよ。
(3) A と D は隣接しているか。

例題 1 の解答・解説

(1) A、B、D である。C を端点にもつ辺が $\{A,C\},\{B,C\},\{C,D\}$ だからである。
(2) 次数の和は $2+2+3+1+0=8$ である。辺は 4 本で、各辺は両端の次数に 1 ずつ数えられるので、次数の和は $2\times 4=8$ となる。
(3) 隣接していない。A と D を直接結ぶ辺 $\{A,D\}$ が辺集合にないからである。

2. 事象からグラフを作る

架空の創作クラブに、アオ、キイ、ミド、ムラ、シロの 5 人がいるとする。「共同作品を 1 点以上作った」という相互的な関係を辺で表す。共同制作の組が、アオとキイ、アオとミド、キイとミド、ミドとムラ、ムラとシロであったなら、頂点集合と辺集合は

$$V=\{\text{アオ},\text{キイ},\text{ミド},\text{ムラ},\text{シロ}\},$$

$$E=\{\{\text{アオ},\text{キイ}\},\{\text{アオ},\text{ミド}\},\{\text{キイ},\text{ミド}\},$$

$$\{\text{ミド},\text{ムラ}\},\{\text{ムラ},\text{シロ}\}\}$$

となる。同じ 2 人が何点作っていても、「1 点以上作ったか」だけを表す単純グラフでは辺は 1 本である。回数まで表したいなら、辺に数を添えるなど別の表現規則が必要になる。

例題 2：関係を辺にする

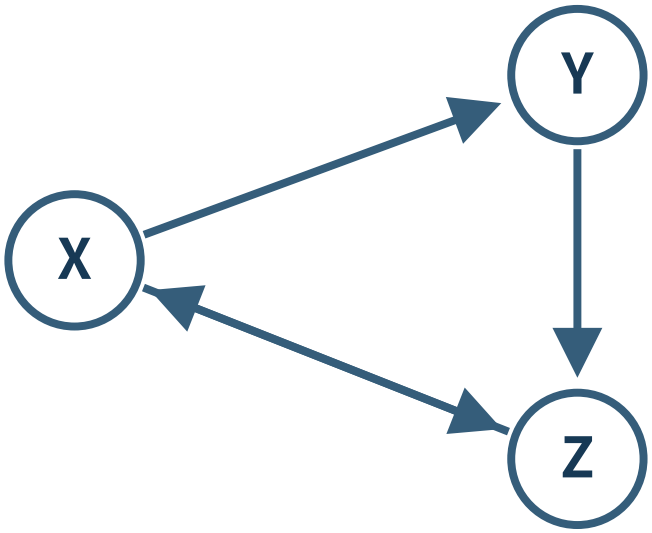
架空の 4 冊の資料 P、Q、R、S について、「共通するキーワードがある」という関係を考える。P と Q、P と R、Q と R、R と S に共通語があり、それ以外の組にはない。
(1) 頂点集合と辺集合を答えよ。
(2) 次数が最大の頂点と、その次数を答えよ。
(3) 「P と S に共通語がある」と誤って判断しないため、何を確認すべきか。

例題 2 の解答・解説

(1) $V=\{P,Q,R,S\}$、$E=\{\{P,Q\},\{P,R\},\{Q,R\},\{R,S\}\}$ である。
(2) R で、次数は 3 である。R を端点にもつ辺は $\{P,R\},\{Q,R\},\{R,S\}$ の 3 本だからである。
(3) 辺 $\{P,S\}$ があるかを確認する。ここではその辺がないので、P と S に共通語があるとは表されていない。

3. 向きのある関係

「共同制作した」のように相互的な関係には向きがない。一方、「資料 X が資料 Y を参照する」のように、出発点と到着点を区別する関係は矢印で表す。このようなグラフを**有向グラフ**、矢印を**有向辺**という。有向辺 $X \to Y$ があっても、$Y \to X$ があるとは限らない。



この図では、X から出る有向辺は 2 本、X へ入る有向辺は 1 本である。前者の本数を**出次数**、後者の本数を**入次数**という。各有向辺は一つの頂点から出て一つの頂点へ入るため、全頂点の出次数の和と入次数の和は、ともに有向辺の本数に等しい。

例題 3：有向グラフを読む

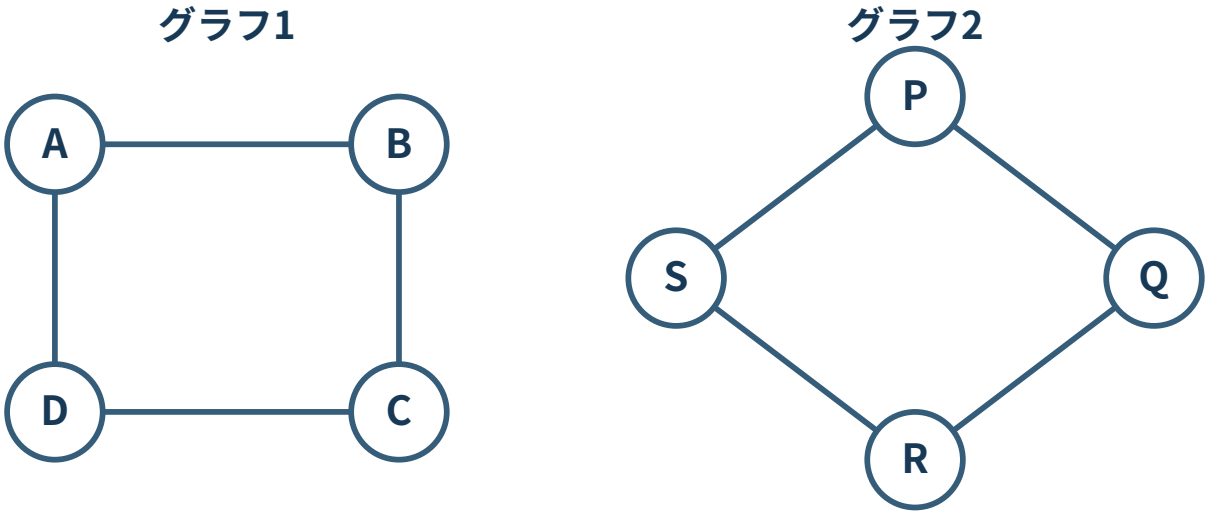
上の有向グラフについて答えよ。
(1) 各頂点の出次数と入次数を答えよ。
(2) 全頂点の出次数の和と入次数の和を求め、有向辺の本数と比べよ。
(3) 「Y が X を参照する」という関係は表されているか。

例題 3 の解答・解説

(1) X は出次数 2、入次数 1、Y は出次数 1、入次数 1、Z は出次数 1、入次数 2 である。矢印の向きを 1 本ずつ確認する。
(2) 出次数の和は $2+1+1=4$、入次数の和は $1+1+2=4$ であり、どちらも有向辺 4 本と一致する。
(3) 表されていない。図にあるのは $X \to Y$ であり、逆向きの $Y \to X$ ではない。

4. 見た目が違っても同じ関係

次の二つのグラフを比べる。左の頂点対応を $A \leftrightarrow P$、$B \leftrightarrow Q$、$C \leftrightarrow R$、$D \leftrightarrow S$ とする。



グラフ 1 の辺 AB、BC、CD、DA は、対応によってグラフ 2 の辺 PQ、QR、RS、SP になる。隣接する頂点どうしがすべて隣接する頂点どうしに対応し、隣接しない頂点どうしも隣接しないままである。このように、頂点名や描く位置が違っても、1 対 1 の頂点対応で隣接関係が保たれる二つのグラフを**同型**であるという。
同型かどうかを調べるときは、まず頂点数、辺数、各頂点の次数を比べる。これらが異なれば同型ではない。ただし、これらがすべて一致するだけで必ず同型とは限らない。最後は、実際に隣接関係を保つ 1 対 1 対応があるかを確認する。

例題 4：同じ構造か

グラフ H の辺集合を $\{\{U,V\},\{V,W\},\{W,T\},\{T,U\}\}$ とする。
(1) H の各頂点の次数を答えよ。
(2) 上のグラフ 1 と H が同型であることを示す頂点対応を一つ答え、辺がどの辺に移るかを示せ。

例題 4 の解答・解説

(1) U、V、W、T の次数はすべて 2 である。
(2) 例えば $A \leftrightarrow U$、$B \leftrightarrow V$、$C \leftrightarrow W$、$D \leftrightarrow T$ と対応させる。AB は UV、BC は VW、CD は WT、DA は TU に移る。4 本の辺がすべて保たれ、1 対 1 対応になっているので同型である。

演習問題

問題 1：辺集合と次数

$V=\{A,B,C,D,E\}$、$E=\{\{A,B\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}\}$ とする。
(1) B に隣接する頂点をすべて答えよ。
(2) 各頂点の次数を答えよ。
(3) 次数の和と辺数の 2 倍が一致することを確かめよ。

問題 2：図の読み方

辺 AC と辺 BD を、紙面上で途中に交点を作るように描いた。ただし交点には点も名前も付けていない。この交点を頂点として数えるべきか。また、辺の本数はいくつか。

問題 3：次数から辺数を調べる

単純グラフの 5 頂点の次数が、順に $3, 2, 2, 1, 0$ である。このグラフの辺数を求めよ。また、次数が 0 の頂点を何というか。

問題 4：有向辺

有向辺が $A \to B$、$A \to C$、$C \to B$、$B \to A$ の 4 本である。
(1) A、B、C の出次数と入次数を答えよ。
(2) 出次数の和と入次数の和を確かめよ。

問題 5：同型でないことを示す

グラフ K の次数を小さい順に並べると $1, 1, 2, 2$、グラフ L では $1, 1, 1, 3$ であった。K と L が同型でない理由を述べよ。

問題 6：関係をモデル化する

架空の 4 施設 M、N、O、P について、「同じ日に相互利用できる」という関係が、M と N、M と O、N と O、O と P の間にある。
(1) 頂点集合と辺集合を答えよ。
(2) O に隣接する施設と O の次数を答えよ。
(3) M と P は隣接しているか。理由も述べよ。

解答・解説

問題 1 の解答・解説

(1) A、C、D である。B を端点にもつ辺は AB、BC、BD である。
(2) A は 2、B は 3、C は 2、D は 3、E は 0 である。
(3) 次数の和は $2+3+2+3+0=10$ である。辺は 5 本なので、その 2 倍も $2\times 5=10$ となる。各辺の両端を 1 回ずつ数えるため一致するのである。

問題 2 の解答・解説

交点は頂点として数えない。頂点であることを示す点と名前がなく、2 本の辺が紙面上で交差しているだけだからである。辺は AC と BD の 2 本である。

問題 3 の解答・解説

次数の和は $3+2+2+1+0=8$ である。各辺は両端の次数に 1 ずつ数えられるので、辺数は $8\div 2=4$ である。次数が 0 の頂点を孤立頂点という。

問題 4 の解答・解説

(1) A は出次数 2、入次数 1、B は出次数 1、入次数 2、C は出次数 1、入次数 1 である。
(2) 出次数の和は $2+1+1=4$、入次数の和は $1+2+1=4$ で、どちらも有向辺の本数 4 に等しい。

問題 5 の解答・解説

同型なら、頂点を対応させても各頂点の次数は保たれる。K には次数 2 の頂点が 2 個あるのに対し、L には次数 2 の頂点がなく次数 3 の頂点が 1 個ある。次数の並びが異なるので、隣接関係を保つ 1 対 1 対応は存在せず、同型ではない。

問題 6 の解答・解説

(1) $V=\{M,N,O,P\}$、$E=\{\{M,N\},\{M,O\},\{N,O\},\{O,P\}\}$ である。相互利用できる関係なので、辺に向きは付けない。
(2) M、N、P であり、O の次数は 3 である。
(3) M と P を直接結ぶ辺 $\{M,P\}$ が辺集合にないので、隣接していない。

©ミライコーチング