

第 66 講 反復試行

学習目標

- ・ 同じ条件の独立な試行を繰り返す反復試行の意味を説明できる。
- ・ 成功確率が p の試行を n 回行うとき、1 つの決まった成功・失敗の並びの確率を求められる。
- ・ n 回中ちょうど r 回成功する位置の選び方が C_n^r 通りになることを説明できる。
- ・ 反復試行の確率 $C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$ を使って基本問題を解ける。

同じ試行を何回か繰り返す

成功と失敗の 2 種類に分けて考える

同じ条件の独立な試行を何回か繰り返す場面を考えます。

たとえば、公正なコインを何回か投げて、

- ・ 表が出ることを「成功」
- ・ 裏が出ることを「失敗」

と呼ぶことにします。

ここでの「成功」「失敗」は、結果を 2 種類に分けるための名前です。

1 回の試行で成功する確率を p とすると、失敗する確率は、

$$1 - p$$

です。

この試行を同じ条件で独立に何回も行うとき、「ちょうど何回成功するか」という確率を考えるのが反復試行です。

反復試行

成功する確率が毎回 p で、各回が互いに独立である試行を、同じ条件で繰り返して行うことを反復試行といいます。

反復試行で確認する 2 つの条件

この講の公式を使う前に、次を確認します。

1. 各回の成功確率が同じ p である。
2. 各回の試行が互いに独立である。

この 2 つがそろっていることが大切です。

まず 1 つの決まった並びを考える

3 回中 2 回成功する 1 つの並び

成功確率が p の独立な試行を 3 回行います。

「成功・成功・失敗」という 1 つの決まった並びを考えます。

各回は独立なので、この並びの確率は、

$$p \cdot p \cdot (1 - p)$$

です。

したがって、

$$p^2(1-p)$$

となります。

同じように、

- ・ 成功・失敗・成功
- ・ 失敗・成功・成功

という並びも、それぞれ成功 2 回、失敗 1 回なので、確率はすべて、

$$p^2(1-p)$$

です。

決まった並びの確率

n 回中、成功が r 回、失敗が $n-r$ 回ある 1 つの決まった並びの確率は、

$$p^r(1-p)^{n-r}$$

です。

成功する回がどこにあるかは違っても、成功回数と失敗回数が同じなら、各並びの確率は同じです。

成功する位置を選ぶ

ちょうど r 回成功する並びはいくつあるか

成功確率が p の試行を 5 回行い、ちょうど 2 回成功する場合を考えます。

5 回のうち、どの 2 回を成功にするかを決めれば、成功・失敗の並びが 1 つ決まります。

たとえば、

- ・ 1 回目と 2 回目が成功
- ・ 1 回目と 4 回目が成功
- ・ 3 回目と 5 回目が成功

などです。

つまり、5 個の位置から成功する 2 個の位置を選べばよいので、その選び方は、

$$C_5^2$$

通りです。

成功する位置の選び方

n 回中ちょうど r 回成功する並びの数は、

$$C_n^r$$

通りです。

順番を並べ替えるのではなく、 n 個の試行位置から「成功になる r 個の位置」を選んでいきます。

反復試行の公式を作る

並びの数と 1 つの並びの確率を組み合わせる

成功確率が p の独立な試行を n 回行い、ちょうど r 回成功する確率を考えます。

まず、成功する r 回の位置の選び方は、

$$C_n^r$$

通りです。

次に、そのうち 1 つの決まった並びの確率は、

$$p^r(1-p)^{n-r}$$

です。

これらの並びは同時には起こらず、どの並びも同じ確率です。

したがって、

$$C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$$

となります。

反復試行の確率

成功する確率が p の独立な試行を n 回行うとき、ちょうど r 回成功する確率は、

$$C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$$

です。

公式の 3 つの部分

反復試行の公式、

$$C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$$

は、次の 3 つに分けて意味を確認できます。

部分	意味
C_n^r	成功する r 回の位置の選び方
p^r	成功が r 回起こる分
$(1-p)^{n-r}$	失敗が $n-r$ 回起こる分

公式を丸暗記するのではなく、この 3 つに分けて考えます。

公正なコインを 4 回投げる

ちょうど 2 回表が出る確率

公正なコインを 4 回投げ、表を成功とします。

1 回で表が出る確率は、

$$p = \frac{1}{2}$$

です。

ちょうど 2 回表が出るには、4 回のうち表になる 2 回の位置を選びます。

その選び方は、

$$C_4^2 = 6$$

通りです。

1 つの決まった並び、たとえば「表・表・裏・裏」の確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

です。
したがって、求める確率は、

$$C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

です。

nCr だけでは確率にならない

C_n^r は成功する位置の個数を表しているだけです。
確率を求めるには、それぞれの並びが起こる確率、

$$p^r (1-p)^{n-r}$$

も掛ける必要があります。

成功確率が 2 分の 1 でない場合

成功と失敗の確率を区別する

ある試行で、成功する確率が $\frac{1}{3}$ だとします。
このとき失敗する確率は、

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

です。
この試行を 4 回独立に行い、ちょうど 1 回成功する確率は、

$$C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

です。
計算すると、

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81}$$

です。
成功確率と失敗確率が異なる場合には、 p と $1-p$ を取り違えないようにします。

指数は回数を表す

ちょうど r 回成功するとき、

- 成功は r 回なので p^r
- 失敗は $n-r$ 回なので $(1-p)^{n-r}$

です。
 $n-r$ は「成功しなかった回数」です。

0 回成功する場合

すべて失敗する

成功確率が p の試行を n 回行い、成功が 0 回となる場合を考えます。
成功する位置を選ぶ方法は、

$$C_n^0 = 1$$

通りです。

すべて失敗するので、その確率は、

$$(1-p)^n$$

です。

したがって、公式でも、

$$C_n^0 p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$$

となります。

少なくとも 1 回は余事象が便利

「少なくとも 1 回成功する」の反対は、「1 回も成功しない」です。
そのため、小規模な問題では、

$$1 - 1 \text{ 回も成功しない確率}$$

とすると簡単に求められることがあります。

反復試行を解く手順

基本手順

1. 1 回の成功確率 p を確認する。
2. 失敗確率 $1-p$ を求める。
3. 試行回数 n と成功回数 r を確認する。
4. 成功する位置の選び方 C_n^r を求める。
5. 1 つの並びの確率 $p^r (1-p)^{n-r}$ を求める。
6. 2 つを掛ける。
7. 答えが 0 以上 1 以下であることを確認する。

例題

例題 1

公正なコインを 3 回投げます。
表がちょうど 2 回出る確率を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

表を成功とすると、

$$p = \frac{1}{2}$$

です。

3 回のうち表が出る 2 回の位置の選び方は、

$$C_3^2 = 3$$

通りです。

1 つの決まった並びの確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

です。

したがって、

$$C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

です。

例題 2

1 回の試行で成功する確率が $\frac{1}{4}$ です。

この試行を 4 回独立に行うとき、ちょうど 2 回成功する確率を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

成功確率は、

$$p = \frac{1}{4}$$

で、失敗確率は、

$$1 - p = \frac{3}{4}$$

です。

4 回のうち成功する 2 回の位置の選び方は、

$$C_4^2 = 6$$

通りです。

したがって、

$$C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

を計算します。

$$6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{54}{256} = \frac{27}{128}$$

です。

例題 3

公正な 6 面さいころを 4 回投げます。
「6 の目が出る」ことを成功とすると、少なくとも 1 回 6 の目が出る確率を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

1 回で 6 が出る確率は $\frac{1}{6}$ です。
「少なくとも 1 回 6 が出る」の余事象は、「4 回とも 6 が出ない」です。
1 回で 6 が出ない確率は、

$$\frac{5}{6}$$

です。
各回は独立なので、4 回とも 6 が出ない確率は、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

です。
したがって、求める確率は、

$$1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

です。

演習問題**練習問題 1**

公正なコインを 4 回投げます。
表がちょうど 1 回出る確率を求めなさい。

練習問題 2

公正なコインを 5 回投げます。
表がちょうど 3 回出る確率を求めなさい。

練習問題 3

1 回の試行で成功する確率が $\frac{1}{3}$ です。
この試行を 3 回独立に行うとき、ちょうど 2 回成功する確率を求めなさい。

練習問題 4

1 回の試行で成功する確率が $\frac{2}{5}$ です。
この試行を 4 回独立に行うとき、ちょうど 1 回成功する確率を求めなさい。

練習問題 5

公正な 6 面さいころを 3 回投げます。
「偶数の目が出る」ことを成功とすると、ちょうど 2 回成功する確率を求めなさい。

練習問題 6

公正な 6 面さいころを 3 回投げます。
「1 の目が出る」ことを成功とすると、成功が 0 回である確率を求めなさい。

練習問題 7

1 回の試行で成功する確率が $\frac{3}{4}$ です。
この試行を 5 回独立に行うとき、ちょうど 4 回成功する確率を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、成功確率が $\frac{1}{3}$ の試行を 4 回行い、ちょうど 2 回成功する確率を、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

としました。
不足している考えを説明し、正しい確率を求めなさい。

練習問題 9

公正なコインを 4 回投げます。
少なくとも 1 回表が出る確率を、余事象を使って求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

表を成功とすると、 $p = \frac{1}{2}$ です。
4 回のうち表が出る 1 回の位置の選び方は、

$$C_4^1 = 4$$

通りです。
したがって、

$$C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

5 回のうち表が出る 3 回の位置を選びます。
したがって、

$$C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

です。
 $C_5^3 = 10$ なので、

$$10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

成功確率は $\frac{1}{3}$ 、失敗確率は $\frac{2}{3}$ です。
したがって、

$$C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)$$

です。
計算すると、

$$3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

成功確率は $\frac{2}{5}$ 、失敗確率は $\frac{3}{5}$ です。
4 回中 1 回成功するので、

$$C_4^1 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

です。
したがって、

$$4 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{27}{125} = \frac{216}{625}$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

1 回で偶数が出る確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

3 回中ちょうど 2 回成功するので、

$$C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

1 回で 1 の目が出ない確率は、

$$\frac{5}{6}$$

です。

成功が 0 回とは、3 回とも 1 の目が出ないことです。

したがって、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

成功確率は $\frac{3}{4}$ 、失敗確率は $\frac{1}{4}$ です。

5 回中ちょうど 4 回成功するので、

$$C_5^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)$$

です。

したがって、

$$5 \cdot \frac{81}{256} \cdot \frac{1}{4} = \frac{405}{1024}$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

与えられた式は、成功 2 回・失敗 2 回となる 1 つの決まった並びの確率です。
4 回のうち成功する 2 回の位置には、

$$C_4^2 = 6$$

通りあります。
したがって、正しい確率は、

$$C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

です。
計算すると、

$$6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

「少なくとも 1 回表が出る」の余事象は、「4 回とも裏が出る」です。
4 回とも裏が出る確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

です。
したがって、求める確率は、

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

です。