第 182 講 $x \to \infty$ の極限

学習目標

- xを限りなく大きくするときの関数の変化を、極限の記号で表し、その意味を説明できる。
- 有限の極限値へ近づく場合と、関数値が限りなく大きくなる場合を区別して判断できる。
- 多項式や有理式の$x \to +\infty$での極限を、最高次の項に注目して計算できる。

概念・定義・要点

実数値関数$f(x)$が、ある実数R_0より大きいすべての実数入力で定義されているとする。
$x \to +\infty$での有限の極限とは、xを正の方向へ限りなく大きくしたとき、関数値$f(x)$が有限実数Lへ近づくことを意味する。
このことを $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ と表す。
任意の正の誤差εを決めると、それに応じてR_0以上の実数Rを選ぶことができ、$x > R$を満たすすべての入力で $| f(x) - L | < \varepsilon$ となることが、有限極限の正確な意味である。
ここで重要なのは、xを大きくした後の全入力で条件が成り立つことである。「Lへ近づく」とは必ず一方向へ単調に変化することを意味しない。関数値が上下に動きながら近づく場合や、最初から常にLと等しい定数関数の場合も含まれる。
∞は実数ではないため、$x = \infty$を代入したり、$\frac{1}{\infty} = 0$のように数の計算として扱ったりしてはいけない。
$x \to -\infty$は入力xを負の方向へ限りなく小さくすることを表す。これは入力の方向を表す記号であり、出力の大小を直接意味するものではない。負の方向で考える場合は、十分小さい入力範囲で関数が定義されていることを前提にする。

要点

$x \to +\infty$で、$P(x)$が有限実数Aへ近づき、$Q(x)$が有限実数Bへ近づくとき、$B \neq 0$ならば $\frac{P(x)}{Q(x)} \to \frac{A}{B}$ という法則を使うことができる。
ただし、$B \neq 0$はこの法則を適用するための条件であり、商が有限の極限をもつための必要条件ではない。
例えば、$x \neq 0$で $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$ であり、分子と分母はともに0へ近づくが、商の有限極限は存在する。
また、途中にある有限個の入力での値の変更は極限へ影響しない。大切なのは十分先の全入力での挙動である。
有理式では、分子と分母の最高次のxのべきを見て、そのべきで割った後に残る項を調べることが基本的な判断軸になる。

注意

有限の極限と、関数値が$+\infty$や$-\infty$へ発散することは区別する必要がある。
まず入力を$x \to +\infty$に固定して考える。任意の正の基準Kに対して、ある実数Rが存在し、$x > R$を満たすすべての入力で $f(x) > K$ となるとき、$f(x)$は$+\infty$へ発散するという。
同じく、任意の正の基準Kに対して、ある実数Rが存在し、$x > R$を満たすすべての入力で $f(x) < -K$ となるとき、$f(x)$は$-\infty$へ発散するという。
一方、入力を$x \to -\infty$へ向かわせる場合は、条件を$x < R$を満たすすべての入力へ置き換えて考える。

©ミライコーチング

入力が$+\infty$や$-\infty$へ向かうことと、出力が$+\infty$や$-\infty$へ発散することは別の意味である。∞は実数ではないため、$\infty-\infty$や$\frac{\infty}{\infty}$を通常の算術計算として処理してはいけない。

例題 1

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$

例題 1 の解答・解説

xが正の方向へ限りなく大きくなるとき、分母xは限りなく大きくなるため、分数全体は0へ近づく。ただし、これは「$x=\infty$を代入した」という意味ではない。誤差で確認すると、任意の正の数εに対して、$x>\frac{1}{\varepsilon}$ならば $0<\frac{1}{x}<\varepsilon$ となる。
したがって、xを十分大きくすると$\frac{1}{x}$は0との差をε未満にできるため、 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ である。

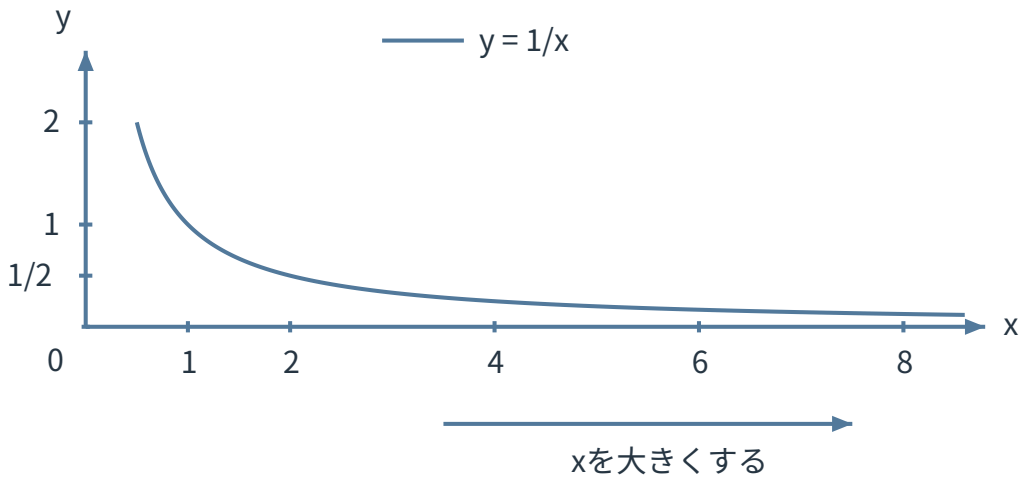

図 1　実線は y=1/x の正の側の一部である。横軸の下の矢印は、x を右へ大きくする向きを示す。関数値は正のまま 0 へ近づく。有限の表示窓の右端は無限遠や定義域の端ではない。極限の説明は本文の一般式に基づく。

例題 2

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+1}$

例題 2 の解答・解説

分子と分母の最高次の項はそれぞれ$2x^2$とx^2であり、次数はともに2である。したがって、最高次のx^2で割って比較する。
$x \to +\infty$では十分大きい正のxを考えるため、$x \neq 0$であり、この割り算は有効である。

$$\frac{2x^2+3x-1}{x^2+1} = \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$x \to +\infty$では$\frac{1}{x}$、$\frac{1}{x^2}$は0へ近づくため、分子は2、分母は1へ近づく。
また、元の分母x^2+1はすべての実数xで正であり、正規化後の分母の極限も1で0ではない。
したがって、分数の極限の法則を使うことができ、$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2+1} = \frac{2}{1} = 2$ である。

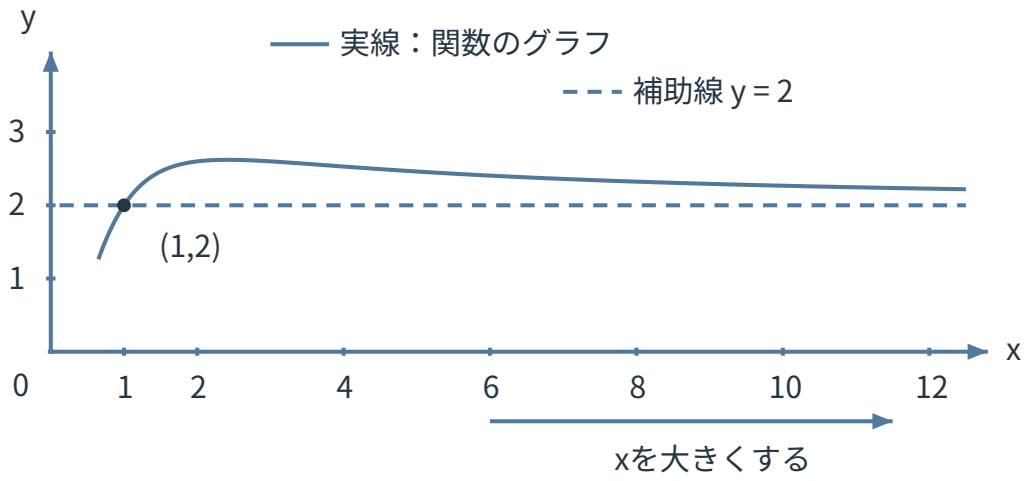

図 2　実線は y=(2x²+3x−1)/(x²+1)の正の側の一部、破線は補助線 y=2 である。x=1 では y=2 であり、x>1 では実線が破線より上にある。x を十分大きくすると関数値は 2 へ近づく。横軸の下の矢印は入力の右方向を示す。有限の表示窓の端を無限遠とはせず、極限は本文の一般式で確かめる。

例題 3

次の極限を調べなさい。
$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2-3x\right)$

例題 3 の解答・解説

x^2-3xでは、x^2と$3x$の差がどのように増えるかを見る。x^2と$-3x$がともに大きくなるという考え方は誤りであり、正負を含めた項の大きさを正しく比較する必要がある。
$x \geq 6$ならば、 $3x \leq \frac{x^2}{2}$ であるから、

$$x^2-3x \geq x^2-\frac{x^2}{2}$$

$$=\frac{x^2}{2}$$

任意の正の数Kに対して、$x \geq 6$かつ$x > \sqrt{2K}$となるようにxを選べば、 $\frac{x^2}{2} > K$ となる。
したがって、その後のすべての入力で$x^2-3x > K$となり、関数値はいくらでも大きくなる。
よって、 $\lim_{x \to +\infty}(x^2-3x) = +\infty$ である。
これは有限の極限値を表すのではなく、$+\infty$への発散を表す記号である。

演習問題

練習問題 1

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x \to +\infty} 5$

練習問題 2

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2}$

練習問題 3

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$

練習問題 4

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2+1}$

練習問題 5

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3-x+4}{x^2+3}$

練習問題 6

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+2x}{x^2+1}$

©ミライコーチング

練習問題 7

次の極限を調べ、有限の値へ近づくか、$+\infty$または$-\infty$へ発散するかを答えなさい。
$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-5x+1)$

練習問題 8

次の極限を求めなさい。
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+1}{-x^3+4x}$

練習問題 1 の解答・解説

定数関数はxがどれだけ大きくなっても値が変化しない。
したがって、$\lim_{x\to+\infty}5=5$である。
$x\to+\infty$は数$+\infty$を代入する操作ではなく、入力を限りなく大きくしたときの変化を見る考え方である。

練習問題 2 の解答・解説

分母x^2は$x\to+\infty$で限りなく大きくなるため、逆数は0へ近づく。
$0<\frac{3}{x^2}$であり、xを十分大きくすると$\frac{3}{x^2}$はどんな小さい正の値よりも小さくできる。
したがって、$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$である。

練習問題 3 の解答・解説

分子と分母の最高次の項はそれぞれ$4x^2$と$2x^2$であり、次数はともに2である。
十分大きいxでは$x\neq0$であり、x^2で割ることができる。

$$\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}$$

また、元の分母は$x\geq2$ならば$2x^2+x-5\geq8+2-5=5$となり、正である。
x^2で割った後の分子は4へ、分母は2へ近づく。
$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\frac{4}{2}=2$である。

練習問題 4 の解答・解説

分子の次数は 1、分母の次数は 2 であり、分母の方が大きい。
分子分母をx^2で割ると、

$$\frac{x+2}{x^2+1}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$x\to+\infty$では分子は0へ近づき、分母は1へ近づく。
分母の極限は1で0ではないため、$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2+1}=0$である。

練習問題 5 の解答・解説

元の式は $\frac{2x^3-x+4}{x^2+3}$ である。
分子の次数は3、分母の次数は2であり、分子の方が高い。x^2で割ると、

$$\frac{2x^3-x+4}{x^2+3} = x\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}}$$

$x \geq 2$ならば、$2-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3} \geq 2-\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ であり、$1+\frac{3}{x^2} \leq 1+\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ かつ分母は正である。
したがって、$x \geq 2$では次の不等式が成り立つ。

$$\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}} \geq 1$$

元の式は $\frac{2x^3-x+4}{x^2+3} \geq x$ である。
任意の正の数Kに対して$x > K$となる十分大きいxを選べば、元の式はKを超える。
したがって、$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x+4}{x^2+3} = +\infty$ である。

練習問題 6 の解答・解説

分母x^2+1はすべての実数xで正である。
割り算を行うと、$\frac{x^3+2x}{x^2+1} = x + \frac{x}{x^2+1}$ となる。
$x < 0$では$x^2+1 > 0$であるため、$\frac{x}{x^2+1} < 0$ である。したがって、$\frac{x^3+2x}{x^2+1} < x$ となる。
任意の正の数Kに対して$x < -K$となるような十分小さいxを選ぶと、$\frac{x^3+2x}{x^2+1} < x < -K$ となる。
任意の正の数Kに対して、十分小さい全入力で $\frac{x^3+2x}{x^2+1} < -K$ となるので、関数値は限りなく小さくなり、$-\infty$へ発散する。
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x}{x^2+1} = -\infty$ である。
ここでは入力が$-\infty$へ向かうことと、出力が$-\infty$へ発散することを区別して考える必要がある。

練習問題 7 の解答・解説

$x \to +\infty$では最高次の項$3x^2$が他の項より大きく影響する。
ただし、∞を代入して$3\infty^2-5\infty+1$のような計算をしてはいけない。
$x \geq \frac{10}{3}$ならば、$3x^2-5x+1 \geq 3x^2-\frac{3}{2}x^2+1$ であるから、$3x^2-5x+1 \geq \frac{3}{2}x^2+1$ となる。
右辺は$x \to +\infty$で限りなく大きくなるため、元の式も限りなく大きくなる。
したがって、$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-5x+1) = +\infty$ である。

練習問題 8 の解答・解説

分子と分母の最高次の項はそれぞれx^3と$-x^3$であり、次数はともに3である。
$x \to +\infty$では十分大きいxを考えるため、$x > 2$ならば $-x^3+4x = -x(x-2)(x+2) \neq 0$ であり、x^3で割ることができる。

$$\frac{x^3-2x^2+1}{-x^3+4x} = \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{-1+\frac{4}{x^2}}$$

$x \to +\infty$では$\frac{1}{x}$、$\frac{1}{x^2}$、$\frac{1}{x^3}$は0へ近づく。
x^3で割った後の分母の極限は-1であり0ではないため、分数の極限の法則を使える。
したがって、$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{-x^3+4x} = \frac{1}{-1} = -1$ である。