第 258 講 複素数の累乗根

学習目標

- n が正の整数、$w \neq 0$ のとき、方程式 $z^n = w$ の解を極形式から導ける。
- w の偏角の選び方にかかわらず、同じ n 個の解が得られることを説明できる。
- 解の絶対値と偏角を用いて、複素数平面上の配置を説明できる。
- $w = 0$ を別に扱い、解の個数を正しく判断できる。

1. 累乗を逆向きにたどる

絶対値は n 乗根、偏角は n 等分する

n を正の整数とし、まず $w \neq 0$ の場合に方程式 $z^n = w$ を考える。w を

$$w = R(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad (R = |\,w\,| > 0)$$

と表す。$z = 0$ は解でないので、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r > 0$）とおける。ド・モアブルの定理により、

$$z^n = r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\}$$

である。同じ複素数の偏角は 2π の整数倍だけ異なるため、$z^n = w$ となる条件は

$$r^n = R, \qquad n\theta = \phi + 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

である。$r > 0$ なので $r = R^{\frac{1}{n}}$ であり、$\theta = \frac{\phi + 2\pi m}{n}$ となる。累乗では絶対値を n 乗し、偏角を n 倍した。その逆では、絶対値の正の n 乗根をとり、偏角を一周分も含めて n 等分するのである。

複素数 $w \neq 0$ の n 乗根

n を正の整数とし、$w = R(\cos\phi + i\sin\phi)$（$R > 0$）とする。方程式 $z^n = w$ の解は

$$z_k = R^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right)\right\} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

であり、相異なる解はちょうど n 個である。これらを w の n 乗根という。

この一覧が過不足ない理由

任意の整数 m は $m = qn + k$（$0 \leq k \leq n-1$）と書ける。このとき、

$$\frac{\phi + 2\pi m}{n} = \frac{\phi + 2\pi k}{n} + 2\pi q$$

なので、整数 m から得る候補は必ず上の $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ のいずれかと同じである。逆に各 z_k を n 乗すると、偏角は $\phi + 2\pi k$ となるので w に戻る。したがって解の取りこぼしも余分な候補もない。
また $0 \leq j < k \leq n-1$ なら、偏角の差は $2\pi\frac{k-j}{n}$ であり、これは 0 より大きく 2π より小さい。よって $z_j \neq z_k$ であり、n 個はすべて相異なる。

例題 1：$z^3 = 8i$ を解く

方程式 $z^3 = 8i$ を解け。

例題 1 の解答・解説

$8i = 8\{\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\}$ である。解の絶対値は $8^{\frac{1}{3}} = 2$、偏角は

$$\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \qquad (k = 0, 1, 2)$$

である。したがって、

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

である。各解の絶対値は 2 であり、偏角は $2\frac{\pi}{3}$ ずつ異なる。

2. 解の配置を図で読む

半径 $R^{\frac{1}{n}}$ の円を等分する

$w \neq 0$ の n 乗根は、すべて絶対値が $R^{\frac{1}{n}}$ であるため、原点を中心とする同じ円上にある。隣り合う解の偏角の差は

$$\frac{\phi + 2\pi(k+1)}{n} - \frac{\phi + 2\pi k}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

である。したがって円周を n 等分し、$n \geq 3$ では正 n 角形の頂点になる。1 の n 乗根との違いは、円の半径が $R^{\frac{1}{n}}$ となり、最初の頂点の偏角が $\frac{\phi}{n}$ だけ回転する点である。

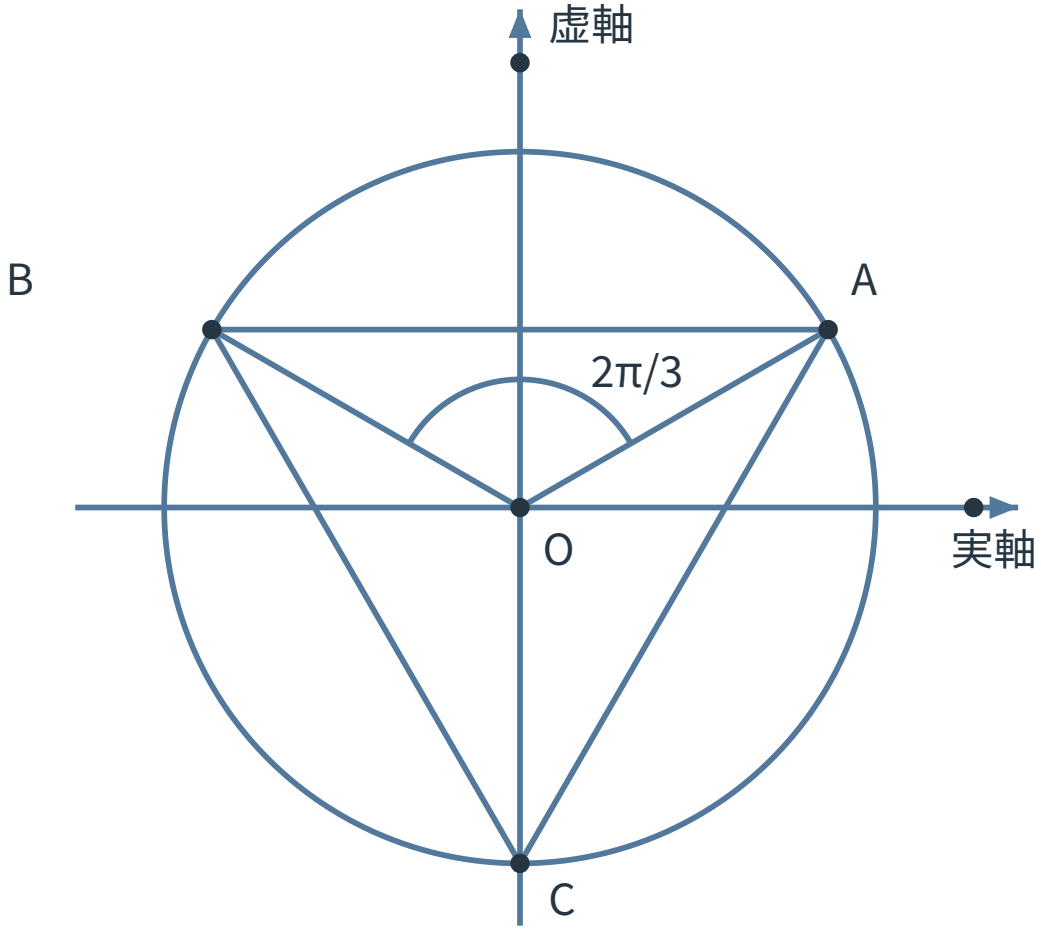

図 1　$z^3 = 8i$ の 3 個の解は半径 2 の円上で正三角形の頂点になる

例題 2：$z^4 = -4$ の解と配置

方程式 $z^4 = -4$ を解き、複素数平面上で解を順に結んでできる図形を答えよ。

例題 2 の解答・解説

$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$ である。解の絶対値は $4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$、偏角は

$$\frac{\pi + 2\pi k}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

である。よって、

$$z = 1 + i,\ \ -1 + i,\ \ -1 - i,\ \ 1 - i$$

である。4 点は原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円上に $\frac{\pi}{2}$ 間隔で並ぶため、順に結ぶと正方形になる。

一つの解と 1 の累乗根から全解をつくる

$w \neq 0$ とし、$\alpha^n = w$ を満たす一つの解 α が分かっているとする。1 の n 乗根を ζ_k（$k = 0, 1, \ldots, n-1$）とすれば、

$$(\alpha\zeta_k)^n = \alpha^n \zeta_k^n = w$$

である。$\alpha \neq 0$ なので、相異なる ζ_k を掛けた $\alpha\zeta_k$ も相異なり、これらが w の n 乗根のすべてである。図形的には、1 の n 乗根の配置を $|\alpha|$ 倍し、α の偏角だけ回転したものになる。

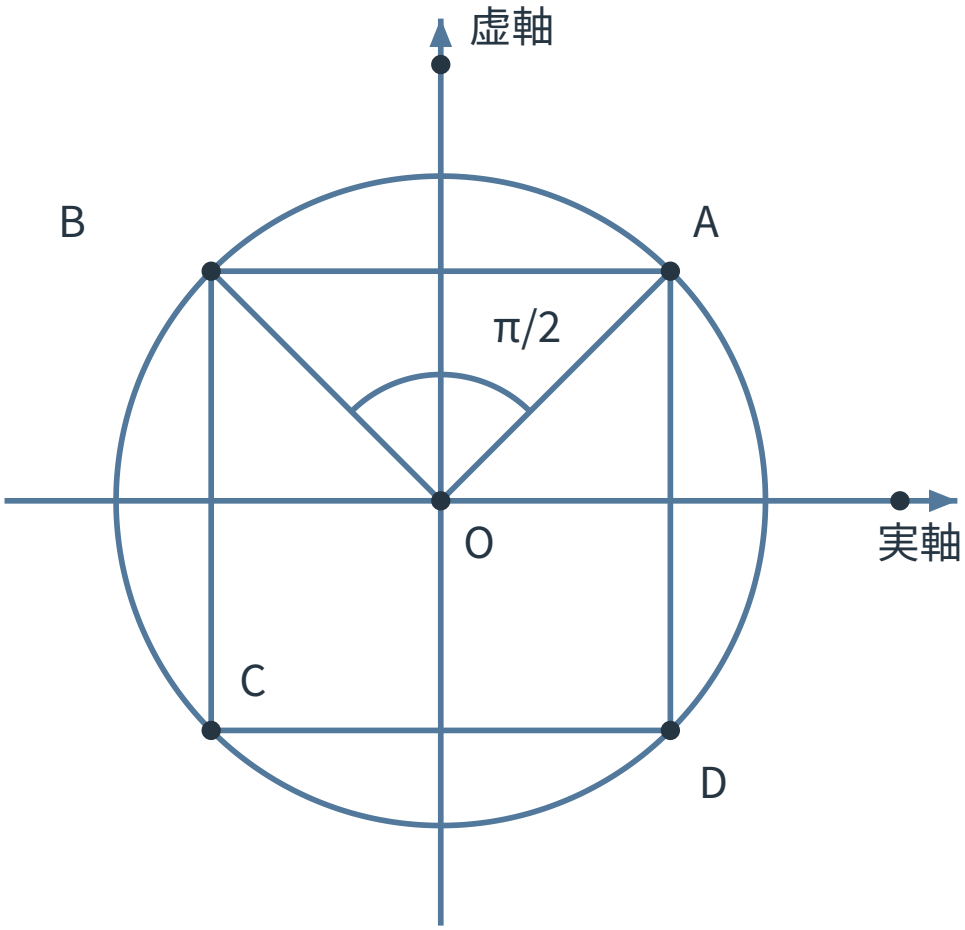

図 2　$z^4 = -4$ の 4 個の解は半径 $\sqrt{2}$ の円上で正方形の頂点になる

3. 偏角の代表を変えても解全体は変わらない

始点がずれるだけで同じ一覧になる

w の偏角として ϕ の代わりに $\phi + 2\pi q$（$q \in \mathbb{Z}$）を選ぶと、得られる候補は

$$R^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\phi + 2\pi(q+k)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2\pi(q+k)}{n}\right)\right\}$$

となる。$k = 0, 1, \ldots, n-1$ を動かすと、$q + k$ の n で割った余りも $0, 1, \ldots, n-1$ を一度ずつ動く。したがって並ぶ順序や添字は変わっても、解の集合は変わらない。

計算では右辺の偏角を一つ選べばよい。ただし、解の偏角には $2\pi k$ を加えてから n で割る。一つの偏角だけを単純に n で割ると、残りの解を失う。

例題 3：異なる偏角から同じ平方根を得る

方程式 $z^2=-3i$ を、$-3i=3\{\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})\}$ と表した場合と、$-3i=3\{\cos(3\frac{\pi}{2})+i\sin(3\frac{\pi}{2})\}$ と表した場合について解き、得られる解の集合が一致することを確かめよ。

例題 3 の解答・解説

偏角を $-\frac{\pi}{2}$ とすると、解の偏角は $-\frac{\pi}{4},3\frac{\pi}{4}$ である。したがって、

$$z=\frac{\sqrt{6}}{2}(1-i),\ \frac{\sqrt{6}}{2}(-1+i)$$

を得る。偏角を $3\frac{\pi}{2}$ とすると、解の偏角は $3\frac{\pi}{4},7\frac{\pi}{4}$ である。後者の $7\frac{\pi}{4}$ は $-\frac{\pi}{4}$ と同じ向きを表すため、得られる 2 個の解は同じである。偏角の代表を変えると、解の並び始めが入れ替わるだけである。

4. 右辺が 0 のときは別に考える

0 の偏角は定まらない

$w=0$ には偏角がないため、$w\neq 0$ 用の公式へ $R=0$ を代入して使ってはならない。$z^n=0$ なら、絶対値をとって $|z|^n=0$ であるから $|z|=0$、すなわち $z=0$ である。逆に $z=0$ は確かに解なので、相異なる解は 0 の 1 個だけである。
$w\neq 0$ のときに相異なる解が n 個あるという結論と、$w=0$ のときに解が 1 個だけであるという結論を区別する必要がある。後者では円周上の等間隔配置や正多角形も現れない。

例題 4：右辺が 0 の場合

n を正の整数とする。方程式 $z^n=0$ を解き、相異なる解の個数を答えよ。

例題 4 の解答・解説

$|z|^n=|z^n|=0$ である。非負の実数 $|z|$ の n 乗が 0 なので $|z|=0$、したがって $z=0$ である。逆に $0^n=0$ なので、解は $z=0$ のみであり、相異なる解は 1 個である。

5. 演習

演習 1：3 乗根を極形式で表す

方程式 $z^3=8$ の解を極形式で表せ。

演習 2：4 乗根を $a+bi$ の形で表す

方程式 $z^4=16$ の解を $a+bi$ の形で表せ。

演習 3：絶対値と偏角を求める

方程式 $z^5 = -32$ の解について、各解の絶対値と、$0 \le \theta < 2\pi$ に選んだ偏角をすべて求めよ。

演習 4：解の配置を説明する

方程式 $z^6 = 64i$ の解は、複素数平面上でどのように並ぶか。円の中心と半径、隣り合う解の中心角、最も小さい非負の偏角を答えよ。

演習 5：右辺の偏角を変える

$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8\{\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\}$ である。方程式 $z^3 = -8$ を両方の偏角表示から解き、得られる解の集合が同じであることを示せ。

演習 6：0 の累乗根

方程式 $z^7 = 0$ を解け。また、$w \neq 0$ の場合の公式をそのまま用いない理由を説明せよ。

演習 1 の解答・解説

$8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$ である。解の絶対値は 2、偏角は $2\pi\frac{k}{3}$（$k = 0, 1, 2$）なので、

$$z = 2(\cos 0 + i\sin 0),\ 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

である。

演習 2 の解答・解説

$16 = 16(\cos 0 + i\sin 0)$ である。解の絶対値は $16^{\frac{1}{4}} = 2$、偏角は $\pi\frac{k}{2}$（$k = 0, 1, 2, 3$）なので、

$$z = 2,\ 2i,\ -2,\ -2i$$

である。

演習 3 の解答・解説

$-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)$ である。各解の絶対値は $32^{\frac{1}{5}} = 2$ である。偏角は

$$\frac{\pi + 2\pi k}{5} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

なので、$0 \le \theta < 2\pi$ では

$$\theta = \frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}$$

である。

©ミライコーチング

演習 4 の解答・解説

$64i = 64\{\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\}$ である。解の絶対値は $64^{\frac{1}{6}} = 2$ なので、原点を中心とする半径 2 の円上に並ぶ。隣り合う解の中心角は $2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$、最も小さい非負の偏角は $\frac{\frac{\pi}{2}}{6} = \frac{\pi}{12}$ である。したがって 6 個の解は、偏角 $\frac{\pi}{12}$ の点を一つの頂点とする正六角形の頂点になる。

演習 5 の解答・解説

偏角を π とすると、解の偏角は $\frac{\pi}{3}, \pi, 5\frac{\pi}{3}$ なので、

$$z = 1 + \sqrt{3}i,\ \ -2,\ 1 - \sqrt{3}i$$

である。偏角を $-\pi$ とすると、解の偏角は $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$ となる。$-\frac{\pi}{3}$ と $5\frac{\pi}{3}$ は同じ向きを表すので、得られる解の集合は一致する。

演習 6 の解答・解説

$|\,z\,|^7 = |\,z^7\,| = 0$ より $|\,z\,| = 0$ であるから、解は $z = 0$ のみである。0 には偏角が定まらず、極形式 $R(\cos\phi + i\sin\phi)$ を $R > 0$ として用いる $w \neq 0$ 用の公式の前提を満たさない。そのため別に扱う必要がある。

累乗根を求めるときの確認事項

- n は正の整数として扱う。
- $w \neq 0$ では、解の絶対値を $|\,w\,|^{\frac{1}{n}}$ とする。$|\,w^{\frac{1}{n}}|$ ではない。
- 偏角は一つを n で割るだけでなく、$\phi + 2\pi k$ を n で割り、$k = 0, 1, \ldots, n-1$ とする。
- 偏角の代表を変えても、添字が入れ替わるだけで解全体は変わらない。
- $w = 0$ では解は $z = 0$ の 1 個であり、$w \neq 0$ 用の公式や正多角形の説明を用いない。

©ミライコーチング