第 244 講 媒介変数で曲線を表す

学習目標

- 関数のグラフを、座標の一方を媒介変数にして表せる。
- 2 点を結ぶ線分を、始点から終点への変化として表せる。
- 円・楕円を、単位円の拡大と平行移動を利用して表せる。
- 作った表示の範囲と進む向きを、端点や代表点で確認できる。

1. 曲線を表すとは、点の動かし方を決めること

方程式から動く点を設計する

媒介変数表示を作るときは、同じ曲線を表す 2 つの式を機械的に探すのではない。まず、曲線上の点を 1 つずつ指定する簡単な動かし方を決める。

- 関数 $y=f(x)$ なら、x を自由に動かして y を決める。
- 線分なら、始点から終点まで一定の割合で動かす。
- 円・楕円なら、単位円上の点 $(\cos t, \sin t)$ を拡大し、必要なら平行移動する。

作った後は、t の範囲、始点、終点、代表点を調べる。この確認によって、曲線全体ではなく一部分しか表していない、または意図と逆向きに進んでいる、といったずれを見つけられる。

代入できるだけでは十分でない

作った $x(t), y(t)$ をもとの方程式へ代入して等式が成り立つことは、「余分な点を作らない」ことの確認である。それだけでは必要な部分を全部通るとは限らない。t の範囲と代表点も調べ、指定された曲線を過不足なく通ることを確認する。

媒介変数表示は 1 通りではない

同じ曲線でも、点を動かす方法を変えれば異なる媒介変数表示が得られる。大切なのは式の形をそろえることではなく、指定された点の集合を過不足なく通るか、範囲と向きが条件に合うかを確かめることである。

2. 関数のグラフを表す

一方の座標を媒介変数にする

関数 $y=f(x)$ のグラフは、$x=t$ と置けば

$$x=t, \qquad y=f(t)$$

と表せる。$a \le x \le b$ の部分なら $a \le t \le b$ とする。逆に $x=g(y)$ なら、$y=t, x=g(t)$ としてもよい。

例題 1：放物線の一部を表す

放物線 $y=(x-1)^2-2$ のうち $-1 \le x \le 3$ の部分を、t が増えると x も増えるように媒介変数表示せよ。また、始点と終点を求めよ。

©ミライコーチング

例題 1 の解答・解説

$x = t$ と置けば、

$$x = t, \qquad y = (t-1)^2 - 2, \qquad -1 \le t \le 3$$

と表せる。$t = -1$ のとき $(-1, 2)$、$t = 3$ のとき $(3, 2)$ である。したがって、始点は $(-1, 2)$、終点は $(3, 2)$ であり、途中で頂点 $(1, -2)$ を通る。

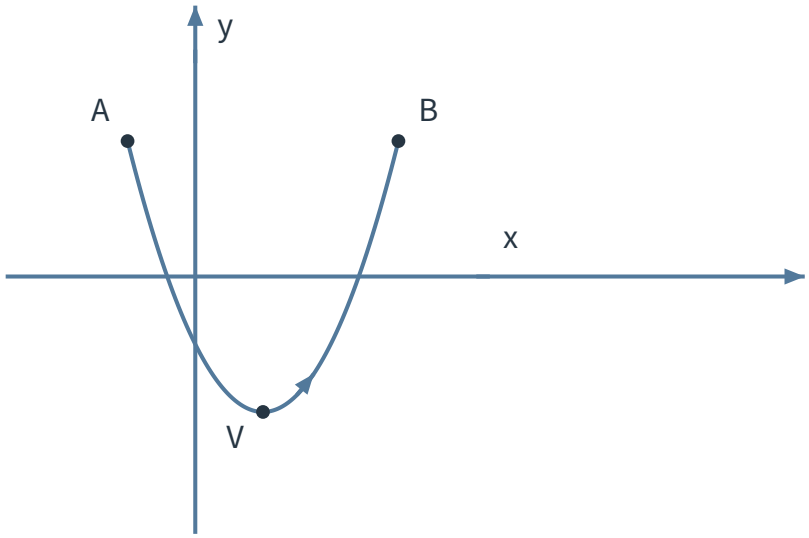

図 1　$(-1, 2)$ から頂点を通り $(3, 2)$ へ進む放物線の一部

3. 2 点を結ぶ線分を表す

始点に変化量を加える

点 $A(a_1, a_2)$ から点 $B(b_1, b_2)$ まで動くと考える。A から B への変化量は $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ であるから、その t 倍を A に加えると

$$x = a_1 + (b_1 - a_1)t, \qquad y = a_2 + (b_2 - a_2)t$$

となる。$0 \le t \le 1$ なら、$t = 0$ で A、$t = 1$ で B となり、線分 AB を A から B へ進む。同じ式で t をすべての実数とすると直線 AB 全体を表す。

例題 2：線分を表す

点 $A(-2, 3)$ と点 $B(4, -1)$ を結ぶ線分を、A から B へ進むように媒介変数表示せよ。また、中点を通るときの t の値を求めよ。

例題 2 の解答・解説

A から B への変化量は $(6,-4)$ である。したがって、

$$x=-2+6t,\qquad y=3-4t,\qquad 0\le t\le 1$$

と表せる。$t=0$ で A、$t=1$ で B になるので、範囲と向きも条件に合う。中点では始点から終点までの変化量の半分だけ進むから $t=\frac{1}{2}$ であり、座標は $(1,1)$ である。

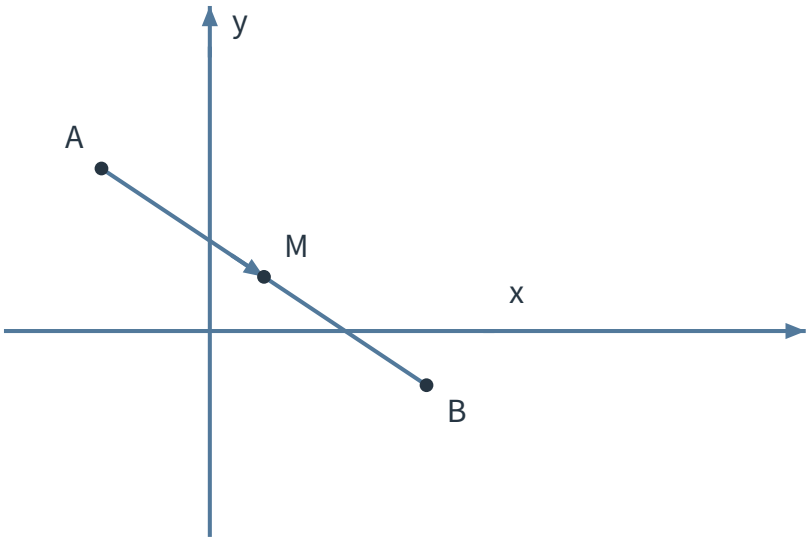

図 2　$A(-2,3)$ から $B(4,-1)$ へ進む線分

端点の確認を省かない

$0\le t\le 1$ を付け忘れると、同じ式は線分ではなく直線全体を表す。また、A と B を入れ替えると通る点の集合は同じでも、進む向きは逆になる。

4. 円と楕円を表す

単位円を拡大し、中心を移す

単位円上の点は $(\cos t,\sin t)$ と表せる。$a>0, b>0$ とし、これを横に a 倍、縦に b 倍すると $(a\cos t, b\sin t)$ となり、さらに (p,q) だけ平行移動すると

$$x=p+a\cos t,\qquad y=q+b\sin t$$

となる。$0\le t\le 2\pi$ なら、中心 (p,q)、横の半径 a、縦の半径 b の楕円を、右端 $(p+a,q)$ から反時計回りに 1 周する。$a=b=r$ なら半径 r の円である。

例題 3：平行移動した楕円を表す

楕円

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

を、右端から反時計回りに 1 周するように媒介変数表示せよ。

例題 3 の解答・解説

中心は $(1,-2)$、横の半径は 3、縦の半径は 2 である。したがって、

$$x=1+3\cos t,\qquad y=-2+2\sin t,\qquad 0\le t\le 2\pi$$

と表せる。$t=0$ で右端 $(4,-2)$ から始まり、$t=\frac{\pi}{2}$ で上端 $(1,0)$ を通るので、向きは反時計回りである。また、式を代入すると

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

となり、確かに与えられた楕円上を動く。

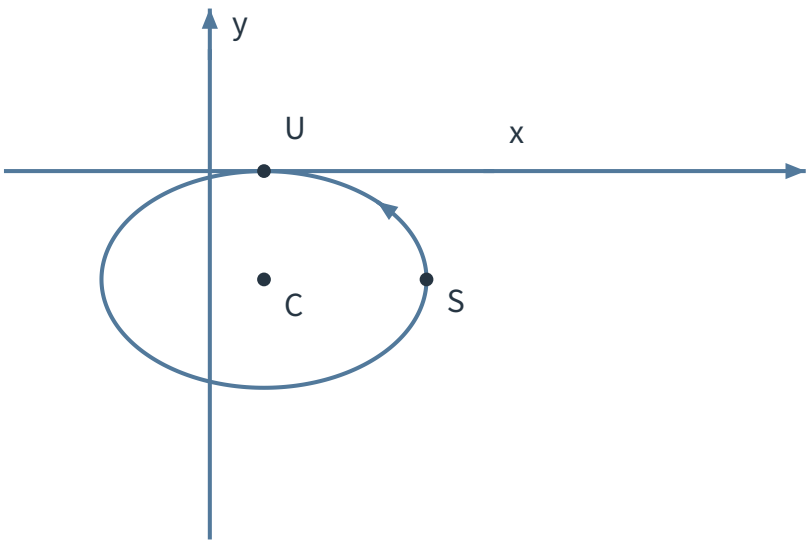

図 3　右端から反時計回りに 1 周する楕円

例題 4：時計回りの円を表す

中心 $(2,1)$、半径 3 の円を、点 $(5,1)$ から時計回りに 1 周するように媒介変数表示せよ。

例題 4 の解答・解説

反時計回りの表示 $y = 1 + 3\sin t$ の正弦の符号を変えると、上下の進み方が逆になる。よって、

$$x = 2 + 3\cos t, \qquad y = 1 - 3\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

と表せる。$t = 0$ で $(5, 1)$、$t = \frac{\pi}{2}$ で $(2, -2)$ を通るので、右端から下へ向かう時計回りである。さらに $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ も成り立つ。

5. 演習

演習 1：関数のグラフ

曲線 $y = 2x^2 - 3$ のうち $0 \le x \le 2$ の部分を、x が増える向きに媒介変数表示せよ。始点と終点も答えよ。

演習 2：y を媒介変数にする

曲線 $x = y^2 + 1$ のうち $-2 \le y \le 1$ の部分を、y が増える向きに媒介変数表示せよ。始点、終点、途中で通る頂点を答えよ。

演習 3：線分と直線

点 $A(3, -2)$ と点 $B(-1, 4)$ について、次の媒介変数表示を求めよ。
(1) 線分 AB を A から B へ進む表示
(2) 直線 AB 全体の表示

演習 4：円を表す

中心 $(-2, 1)$、半径 4 の円を、点 $(2, 1)$ から反時計回りに 1 周するように媒介変数表示せよ。また、$t = \pi$ のときの点を求めよ。

演習 5：楕円を表す

楕円

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

を、右端から反時計回りに 1 周するように媒介変数表示せよ。また、上端を通るときの t の値を答えよ。

演習 6：下半円を表す

円 $x^2 + y^2 = 25$ のうち $y \le 0$ の部分を、点 $(5, 0)$ から点 $(-5, 0)$ へ進むように媒介変数表示せよ。

©ミライコーチング

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$x = t$ と置けば、

$$x = t, \qquad y = 2t^2 - 3, \qquad 0 \le t \le 2$$

と表せる。始点は $t = 0$ の $(0, -3)$、終点は $t = 2$ の $(2, 5)$ である。

演習 2 の解答・解説

$y = t$ と置けば、

$$x = t^2 + 1, \qquad y = t, \qquad -2 \le t \le 1$$

と表せる。始点は $t = -2$ の $(5, -2)$、終点は $t = 1$ の $(2, 1)$ である。$t = 0$ のとき $(1, 0)$ となり、この点が頂点である。

演習 3 の解答・解説

A から B への変化量は $(-4, 6)$ である。
(1) 線分は

$$x = 3 - 4t, \qquad y = -2 + 6t, \qquad 0 \le t \le 1$$

と表せる。$t = 0$ で A、$t = 1$ で B となる。
(2) 同じ式で t の範囲をすべての実数とすればよい。したがって、

$$x = 3 - 4t, \qquad y = -2 + 6t, \qquad -\infty < t < \infty$$

である。

演習 4 の解答・解説

中心を加え、半径 4 を掛けると、

$$x = -2 + 4\cos t, \qquad y = 1 + 4\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

と表せる。$t = 0$ で $(2, 1)$ から始まり、$t = \frac{\pi}{2}$ で $(-2, 5)$ を通るので反時計回りである。$t = \pi$ のときの点は $(-6, 1)$ である。

演習 5 の解答・解説

中心は $(-1, 3)$、横の半径は 2、縦の半径は 5 である。したがって、

$$x = -1 + 2\cos t, \qquad y = 3 + 5\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

と表せる。$t = 0$ で右端 $(1, 3)$ から始まり、反時計回りに進む。上端 $(-1, 8)$ を通るのは $t = \frac{\pi}{2}$ のときである。

©ミライコーチング

演習 6 の解答・解説

右端から下へ進むように正弦の符号を負にして、

$$x = 5\cos t, \qquad y = -5\sin t, \qquad 0 \le t \le \pi$$

と表せる。代入すると $x^2 + y^2 = 25$ である。また、$0 \le t \le \pi$ では $\sin t \ge 0$ であるから $y \le 0$ となる。

$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ のとき、点は順に $(5,0), (0,-5), (-5,0)$ となる。したがって、下半円全体を指定された向きに進む。

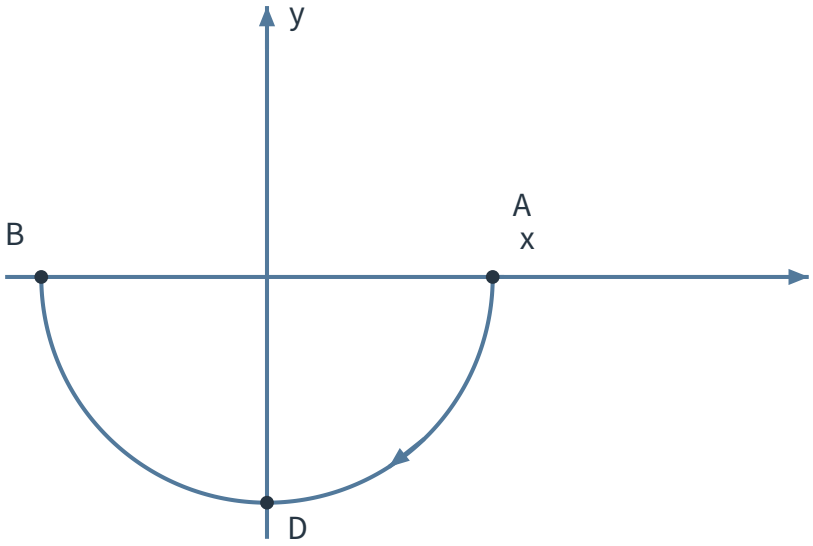

図 4　$(5,0)$ から $(-5,0)$ へ進む下半円