

第 16 講 一次不等式

学習目標

- ・ 不等式が表す大小関係を読み取れる。
- ・ 不等式の両辺へ同じ数を加えたり引いたりして、同値な不等式へ変形できる。
- ・ 正の数・負の数で両辺を掛けたり割ったりしたときの不等号の向きを正しく判断できる。
- ・ 一次不等式を解き、解を数直線上の範囲として表せる。

不等式は「1つの答え」ではなく「範囲」を表す

方程式との違いを見る

方程式 $x + 2 = 5$ を満たす数は $x = 3$ の 1 つです。

一方、不等式 $x + 2 < 5$ を満たす数は $x = 2$ 、 $x = 0$ 、 $x = -10$ など、1 つではありません。

この不等式を整理すると $x < 3$ となり、「3 より小さいすべての実数」が解になります。

一次不等式では、特定の 1 つの値を探すのではなく、**条件を満たす数の範囲を求める**ことが基本です。

不等式

$<$ 、 $>$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ を使って、2 つの数量の大小関係を表した式を**不等式**といいます。
たとえば $x < 4$ は「 x は 4 より小さい」、 $x \geq 2$ は「 x は 2 以上である」ことを表します。

不等号の読み方

- ・ $a < b$: a は b より小さい
- ・ $a > b$: a は b より大きい
- ・ $a \leq b$: a は b 以下
- ・ $a \geq b$: a は b 以上

「以下」「以上」には等しい場合を含みます。

同じ数を足したり引いたりしても大小関係は変わらない

数直線を同じだけ平行移動する

$2 < 5$ という大小関係を考えます。

両方に 3 を足すと $5 < 8$ となり、大小関係は変わりません。

両方から 4 を引いても $-2 < 1$ となり、やはり大小関係は変わりません。

2 つの数を数直線上で同じだけ右や左へ動かしても、左右の順序は入れ替わらないからです。
したがって、不等式の両辺には同じ数を加えたり、同じ数を引いたりできます。

加法・減法による変形

$a < b$ のとき、どんな実数 c に対しても $a + c < b + c$ です。

同じ考え方で、両辺から同じ数を引いても不等号の向きは変わりません。

負の数を掛けると不等号が逆になる

符号が変わると数直線上の左右が反転する

$2 < 5$ の両辺に 2 を掛けると $4 < 10$ です。正の数を掛けたとき、大小関係は変わりません。ところが、両辺に -1 を掛けると -2 と -5 になります。

数直線では -5 の方が左、 -2 の方が右なので、

$$-2 > -5$$

です。

元は $2 < 5$ だったのに、負の数を掛けると大小関係が反対になりました。

負の数を掛けることは、数直線上の位置を原点について左右反対へ移すことに対応します。そのため、不等号の向きも逆になります。

乗法・除法による変形

不等式の両辺に同じ**正の数**を掛けたり、同じ正の数で割ったりすると、不等号の向きは変わりません。

不等式の両辺に同じ**負の数**を掛けたり、同じ負の数で割ったりすると、不等号の向きを逆にします。

不等号を逆にする場面を限定する

移項したから不等号を逆にするわけではありません。

不等号の向きを逆にするのは、両辺を負の数で掛ける、または負の数で割るときです。

たとえば $-2x < 6$ から両辺を -2 で割るときは、不等号を逆にして $x > -3$ とします。

一次不等式を解く

一次不等式

文字について整理したとき、 $ax + b < 0$ などのように文字の次数が 1 である不等式を**一次不等式**といいます。

目標は文字を 1 つだけ残すこと

一次不等式を解く流れは、一次方程式とよく似ています。

たとえば $3x + 2 < 11$ を考えます。

両辺から 2 を引くと $3x < 9$ です。さらに両辺を正の数 3 で割ると $x < 3$ となります。

違いが出るのは、文字の係数が負の場合です。

たとえば $-2x + 1 \geq 7$ なら、両辺から 1 を引いて $-2x \geq 6$ とし、両辺を -2 で割ります。

負の数で割るので不等号を逆にし、 $x \leq -3$ となります。

一次不等式を解く手順

1. かっこがあれば展開する。
2. 文字を含む項を一方へ、数だけの項をもう一方へ集める。
3. 同類項をまとめる。
4. 文字の係数で両辺を割る。
5. 負の数で割る場合だけ、不等号を逆にする。

解を数直線で確かめる**境界を含むかどうかを見る**

$x < 3$ は、数直線上で 3 より左側の範囲を表します。3 自身は含みません。

数直線では 3 に白丸を付け、そこから左側へ線と矢印を伸ばします。

一方、 $x \leq 3$ では 3 自身も解に含まれます。

数直線では 3 に黒丸を付け、そこから左側へ線と矢印を伸ばします。

不等号に等号が付いているかどうかで、境界の点を含むかが決まります。

例題**例題 1**

次の不等式を解きなさい。

- (1) $x + 5 < 9$
- (2) $3x - 4 \leq 8$

例題 1 の解答・解説

(1) 両辺から 5 を引くと $x < 4$ です。

したがって、解は $x < 4$ です。

(2) 両辺に 4 を足すと $3x \leq 12$ です。両辺を正の数 3 で割ると $x \leq 4$ です。

したがって、解は $x \leq 4$ です。

どちらも加減や正の数での除法しか使っていないので、不等号の向きは変わりません。

例題 2

次の不等式を解きなさい。

- (1) $-2x < 8$
- (2) $5 - 3x \geq 11$

例題 2 の解答・解説

(1) 両辺を -2 で割ります。負の数で割るので、不等号を逆にします。

したがって、解は $x > -4$ です。

(2) 両辺から 5 を引くと $-3x \geq 6$ です。

両辺を -3 で割るので、不等号を逆にします。

したがって、解は $x \leq -2$ です。

負の係数で割る直前に、不等号を逆にする必要があるかを確認する習慣をつけます。

例題 3

次の不等式を解きなさい。

$$2(x - 3) + 1 < 5x + 4$$

例題 3 の解答・解説

左辺を展開すると $2x - 5 < 5x + 4$ です。

両辺から $2x$ を引くと $-5 < 3x + 4$ 、さらに両辺から 4 を引くと $-9 < 3x$ です。

両辺を正の数 3 で割ると $-3 < x$ です。

したがって、解は $x > -3$ です。

演習問題**練習問題 1**

次の不等式を解きなさい。

(1) $x - 7 > 2$

(2) $x + 4 \leq 10$

練習問題 2

次の不等式を解きなさい。

(1) $4x < 20$

(2) $7x \geq -21$

練習問題 3

次の不等式を解きなさい。

(1) $-3x < 12$

(2) $-5x \geq 15$

練習問題 4

次の不等式を解きなさい。

(1) $2x + 5 < 13$

(2) $4x - 7 \geq 9$

練習問題 5

次の不等式を解きなさい。

(1) $7 - 2x > 1$

(2) $5 - 4x \leq 17$

練習問題 6

次の不等式を解きなさい。

(1) $3(x + 2) < 2x + 9$

(2) $2(4 - x) \geq x - 1$

練習問題 7

次の不等式を解きなさい。

$$\frac{x - 1}{3} > \frac{x + 3}{2}$$

練習問題 8

ある生徒は、 $-4x < 12$ の両辺を -4 で割って $x < -3$ としました。
この解答の誤りを説明し、正しい解を求めなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

- (1) 両辺に 7 を足すと $x > 9$ です。
(2) 両辺から 4 を引くと $x \leq 6$ です。
したがって、解はそれぞれ $x > 9$ 、 $x \leq 6$ です。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) 両辺を正の数 4 で割ると $x < 5$ です。
(2) 両辺を正の数 7 で割ると $x \geq -3$ です。
正の数で割っているなので、不等号の向きは変わりません。

練習問題 3 の解答・解説

- (1) 両辺を -3 で割ります。負の数で割るので不等号を逆にし、 $x > -4$ です。
(2) 両辺を -5 で割ります。やはり不等号を逆にし、 $x \leq -3$ です。
したがって、解はそれぞれ $x > -4$ 、 $x \leq -3$ です。

練習問題 4 の解答・解説

- (1) 両辺から 5 を引くと $2x < 8$ です。両辺を 2 で割ると $x < 4$ です。
(2) 両辺に 7 を足すと $4x \geq 16$ です。両辺を 4 で割ると $x \geq 4$ です。
したがって、解はそれぞれ $x < 4$ 、 $x \geq 4$ です。

練習問題 5 の解答・解説

- (1) 両辺から 7 を引くと $-2x > -6$ です。両辺を -2 で割るので不等号を逆にし、 $x < 3$ です。
(2) 両辺から 5 を引くと $-4x \leq 12$ です。両辺を -4 で割るので不等号を逆にし、 $x \geq -3$ です。
したがって、解はそれぞれ $x < 3$ 、 $x \geq -3$ です。

練習問題 6 の解答・解説

- (1) 展開すると $3x + 6 < 2x + 9$ です。両辺から $2x$ を引き、さらに 6 を引くと $x < 3$ です。
したがって、解は $x < 3$ です。
- (2) 展開すると $8 - 2x \geq x - 1$ です。両辺に 1 を足し、さらに $2x$ を足すと $9 \geq 3x$ です。
両辺を 3 で割ると $3 \geq x$ なので、解は $x \leq 3$ です。

練習問題 7 の解答・解説

分母をなくすため、両辺に正の数 6 を掛けます。不等号の向きは変わりません。

$$2(x - 1) > 3(x + 3)$$

展開すると $2x - 2 > 3x + 9$ です。

両辺から $2x$ を引くと $-2 > x + 9$ 、さらに両辺から 9 を引くと $-11 > x$ です。
したがって、解は $x < -11$ です。

練習問題 8 の解答・解説

誤りは、両辺を負の数 -4 で割ったのに、不等号の向きを変えていないことです。

$-4x < 12$ の両辺を -4 で割ると、不等号を逆にして $x > -3$ となります。

したがって、正しい解は $x > -3$ です。

負の数で割ると数直線上の左右の順序が反転するため、不等号も逆向きになります。