

## 第 18 講 正弦・余弦・正接

### 学習目標

- ・ 直角三角形で、基準となる鋭角に対する斜辺・向かい側の辺・となりの辺を区別できる。
- ・ 正弦  $\sin$ 、余弦  $\cos$ 、正接  $\tan$  を辺の長さの比として説明できる。
- ・ 直角三角形の辺の長さから、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  を求められる。
- ・ 三角比と 1 辺の長さから、未知の辺の長さを求められる。

### 3 種類の辺の比に名前を付ける

#### どの 2 辺を比べるかを区別する

直角三角形では、1 つの鋭角を基準にすると 3 辺の役割が決まります。

直角三角形  $ABC$  で  $\angle C = 90^\circ$  とし、角  $A$  を基準に考えます。

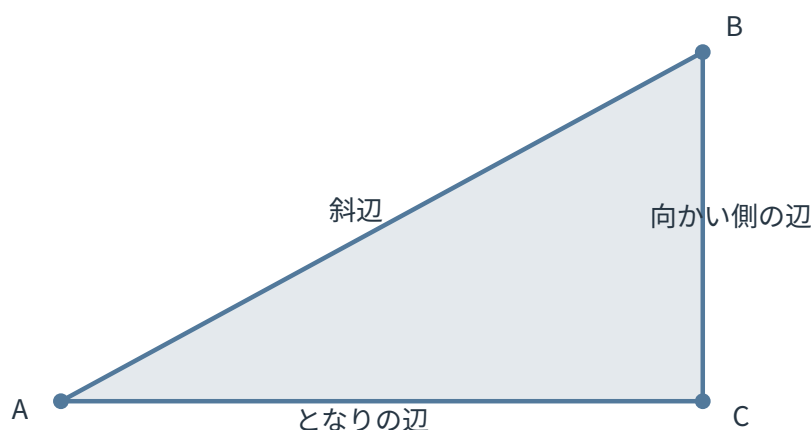


図 1 角  $A$  を基準にした 3 辺の役割

$AB$  は直角の向かいにある辺なので**斜辺**です。

$BC$  は角  $A$  の向かいにある辺、 $AC$  は角  $A$  に接している斜辺以外の辺です。

前の講では、この 3 辺からつくられる比が角の大きさによって決まることを見ました。この 3 種類の基本的な比に名前を付けたものが、正弦・余弦・正接です。

### 正弦 $\sin$

#### 正弦

直角三角形  $ABC$  で  $\angle C = 90^\circ$  のとき、角  $A$  の**正弦**を、

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

と定めます。

つまり、正弦は「角  $A$  の向かい側の辺 ÷ 斜辺」です。

**sin は向かい側と斜辺を見る**

$\sin A$  を求めるときは、角  $A$  の向かい側の辺と斜辺を使います。  
角  $A$  に接している斜辺以外の辺は使いません。

**余弦 cos****余弦**

直角三角形  $ABC$  で  $\angle C = 90^\circ$  のとき、角  $A$  の余弦を、

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

と定めます。  
つまり、余弦は「角  $A$  のとなりの辺 ÷ 斜辺」です。

**cos はとなりと斜辺を見る**

$\cos A$  では、角  $A$  に接している斜辺以外の辺と、斜辺を使います。  
 $\sin A$  と  $\cos A$  はどちらも分母が斜辺ですが、分子に使う辺が違います。

**正接 tan****正接**

直角三角形  $ABC$  で  $\angle C = 90^\circ$  のとき、角  $A$  の正接を、

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

と定めます。  
つまり、正接は「角  $A$  の向かい側の辺 ÷ となりの辺」です。

**tan では斜辺を使わない**

$\tan A$  は、角  $A$  の向かい側の辺ととなりの辺の比です。  
 $\sin A$ 、 $\cos A$  と違い、斜辺を使いません。

**3つの定義を見分ける****正弦・余弦・正接**

角  $A$  を基準にすると、

$$\sin A = \frac{\text{向かい側の辺}}{\text{斜辺}}$$

$$\cos A = \frac{\text{となりの辺}}{\text{斜辺}}$$

$$\tan A = \frac{\text{向かい側の辺}}{\text{となりの辺}}$$

です。

公式だけを覚えるのではなく、最初に「基準となる角」「斜辺」「向かい側」「となり」を図で確認します。

### 基準となる角が変わると辺の役割も変わる

同じ直角三角形でも、角  $A$  ではなくもう一方の鋭角を基準にすると、「向かい側の辺」と「となりの辺」が入れ替わります。

斜辺だけは変わりません。

したがって、辺の長さを式へ代入する前に、どの角の三角比を求めているかを必ず確認します。

## 3、4、5 の直角三角形で確かめる

### 3 種類の比を同じ三角形から求める

直角三角形  $ABC$  で  $\angle C = 90^\circ$ 、 $BC = 3$ 、 $AC = 4$ 、 $AB = 5$  とします。

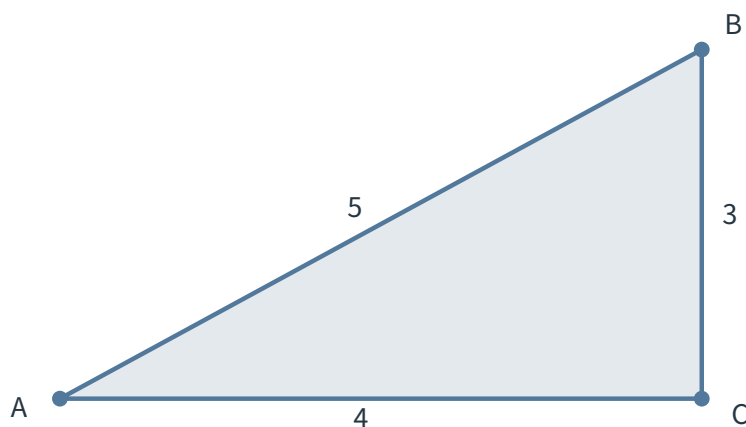


図2 辺の長さが3,4,5の直角三角形

角  $A$  を基準にすると、向かい側の辺は  $BC = 3$ 、となりの辺は  $AC = 4$ 、斜辺は  $AB = 5$  です。

したがって、 $\sin A = \frac{3}{5}$ 、 $\cos A = \frac{4}{5}$ 、 $\tan A = \frac{3}{4}$  です。

3つの値は別々に暗記するのではなく、どの辺とどの辺を比べているかから決まります。

## 三角比から辺の長さを求める

### 比の式に長さを当てはめる

$\sin A = \frac{3}{5}$  で、斜辺の長さが 20 だとします。

角  $A$  の向かい側の辺の長さを  $x$  とすると、正弦の定義から  $\frac{x}{20} = \frac{3}{5}$  です。

この式を解けば  $x = 12$  となります。

三角比は単に比を求めるだけではなく、比と1つの辺の長さを組み合わせて、別の辺の長さを求めるためにも使えます。

### 三角比は辺の長さそのものではない

たとえば  $\sin A = \frac{3}{5}$  は、ある辺の長さが必ず3や5であるという意味ではありません。向かい側の辺と斜辺の長さの比が3:5であるという意味です。実際、対応する辺が6と10でも、12と20でも、比は同じ  $\frac{3}{5}$  です。

## 例題

### 例題 1

直角三角形  $ABC$  で、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $BC = 5$ 、 $AC = 12$ 、 $AB = 13$  とする。  
角  $A$  について、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  をそれぞれ求めなさい。

### 例題 1 の解答・解説

角  $A$  を基準にすると、向かい側の辺は  $BC = 5$ 、となりの辺は  $AC = 12$ 、斜辺は  $AB = 13$  です。  
したがって、 $\sin A = \frac{5}{13}$  です。  
また、 $\cos A = \frac{12}{13}$  です。  
さらに、 $\tan A = \frac{5}{12}$  です。  
どの三角比でも、最初に3辺の役割を確認してから定義へ当てはめます。

### 例題 2

直角三角形  $ABC$  で、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $AC = 8$ 、 $AB = 10$  とする。  
(1) 辺  $BC$  の長さを求めなさい。  
(2)  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  をそれぞれ求めなさい。

### 例題 2 の解答・解説

(1) 三平方の定理より、 $BC^2 + 8^2 = 10^2$  です。  
したがって、 $BC^2 = 36$  なので  $BC = 6$  です。  
(2) 角  $A$  を基準にすると、向かい側が  $BC = 6$ 、となりが  $AC = 8$ 、斜辺が  $AB = 10$  です。  
よって、 $\sin A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 、 $\cos A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ 、 $\tan A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  です。

### 例題 3

ある直角三角形で、鋭角  $A$  について  $\cos A = \frac{3}{5}$  である。  
斜辺の長さが20のとき、角  $A$  に接する斜辺以外の辺の長さを求めなさい。

### 例題 3 の解答・解説

求める辺の長さを  $x$  とします。  
余弦は「となりの辺 ÷ 斜辺」なので、 $\frac{x}{20} = \frac{3}{5}$  です。  
両辺に20を掛けると  $x = 12$  です。  
したがって、求める長さは12です。

## 演習問題

### 練習問題 1

直角三角形  $ABC$  で、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $BC = 8$ 、 $AC = 15$ 、 $AB = 17$  とする。  
角  $A$  について、次の値を求めなさい。

- (1)  $\sin A$
- (2)  $\cos A$
- (3)  $\tan A$

### 練習問題 2

直角三角形  $ABC$  で、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $BC = 7$ 、 $AC = 24$ 、 $AB = 25$  とする。  
角  $A$  を基準にしたとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 向かい側の辺はどの辺か。
- (2) となりの辺はどの辺か。
- (3) 斜辺はどの辺か。
- (4)  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  をそれぞれ求めなさい。

### 練習問題 3

直角三角形  $ABC$  で、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $BC = 9$ 、 $AB = 15$  とする。

- (1) 辺  $AC$  の長さを求めなさい。
- (2) 角  $A$  について、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  をそれぞれ求めなさい。

### 練習問題 4

ある直角三角形で、鋭角  $A$  について  $\sin A = \frac{4}{5}$  である。  
斜辺の長さが 15 のとき、角  $A$  の向かい側の辺の長さを求めなさい。

### 練習問題 5

ある直角三角形で、鋭角  $A$  について  $\tan A = \frac{2}{3}$  である。  
角  $A$  に接する斜辺以外の辺の長さが 12 のとき、角  $A$  の向かい側の辺の長さを求めなさい。

### 練習問題 6

直角三角形  $ABC$  で  $\angle C = 90^\circ$  とする。  
ある生徒は、角  $A$  について  $\sin A = \frac{AC}{AB}$  としました。  
この式が誤っている理由を説明し、正しい式を書きなさい。

**練習問題 7**

辺の長さが 6, 8, 10 である直角三角形と、辺の長さが 9, 12, 15 である直角三角形がある。  
それぞれで、短い方の直角をはさむ辺の向かいにある鋭角を  $A$  とする。  
2 つの三角形について  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  を求め、それぞれの値を比較しなさい。

**練習問題 8**

次のうち、正弦・余弦・正接について正しいものをすべて選びなさい。

- ・ (ア)  $\sin A$  は、角  $A$  の向かい側の辺と斜辺の比である。
- ・ (イ)  $\cos A$  は、角  $A$  の向かい側の辺と斜辺の比である。
- ・ (ウ)  $\tan A$  を求めるとき、斜辺は使わない。
- ・ (エ) 同じ大きさの角  $A$  なら、直角三角形の大きさが変わっても  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  の値は変わらない。

**演習問題の解答・解説****練習問題 1 の解答・解説**

角  $A$  の向かい側は  $BC = 8$ 、となりは  $AC = 15$ 、斜辺は  $AB = 17$  です。

- (1)  $\sin A = \frac{8}{17}$  です。
- (2)  $\cos A = \frac{15}{17}$  です。
- (3)  $\tan A = \frac{8}{15}$  です。

**練習問題 2 の解答・解説**

- (1) 角  $A$  の向かい側の辺は  $BC$  です。
- (2) 角  $A$  のとなりの辺は  $AC$  です。
- (3) 斜辺は、直角の向かいにある  $AB$  です。
- (4) 定義から、 $\sin A = \frac{7}{25}$ 、 $\cos A = \frac{24}{25}$ 、 $\tan A = \frac{7}{24}$  です。

**練習問題 3 の解答・解説**

- (1) 三平方の定理より、 $AC^2 + 9^2 = 15^2$  です。  
したがって、 $AC^2 = 144$  なので  $AC = 12$  です。
- (2) 角  $A$  では、向かい側が 9、となりが 12、斜辺が 15 です。  
よって、 $\sin A = \frac{3}{5}$ 、 $\cos A = \frac{4}{5}$ 、 $\tan A = \frac{3}{4}$  です。

**練習問題 4 の解答・解説**

角  $A$  の向かい側の辺の長さを  $x$  とします。  
正弦の定義から、 $\frac{x}{15} = \frac{4}{5}$  です。  
両辺に 15 を掛けると  $x = 12$  です。  
したがって、求める長さは 12 です。

### 練習問題 5 の解答・解説

---

角  $A$  の向かい側の辺の長さを  $x$  とします。

正接は「向かい側の辺 ÷ となりの辺」なので、 $\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$  です。

両辺に 12 を掛けると  $x = 8$  です。

したがって、求める長さは 8 です。

### 練習問題 6 の解答・解説

---

$\sin A$  は「角  $A$  の向かい側の辺 ÷ 斜辺」です。

$\angle C = 90^\circ$  のとき、斜辺は  $AB$ 、角  $A$  の向かい側の辺は  $BC$  です。

$AC$  は角  $A$  のとなりの辺なので、 $\frac{AC}{AB}$  は  $\cos A$  を表します。

したがって、正しい式は  $\sin A = \frac{BC}{AB}$  です。

### 練習問題 7 の解答・解説

---

最初の三角形では、角  $A$  の向かい側が 6、となりが 8、斜辺が 10 です。

したがって、 $\sin A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 、 $\cos A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ 、 $\tan A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  です。

2 つ目では、対応する辺が 9, 12, 15 なので、 $\sin A = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ 、 $\cos A = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 、 $\tan A = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$  です。

したがって、三角形の大きさは異なりますが、3 つの三角比はすべて等しくなります。

### 練習問題 8 の解答・解説

---

(ア) は正しいです。 $\sin A$  は「向かい側の辺 ÷ 斜辺」です。

(イ) は誤りです。それは  $\sin A$  の比です。 $\cos A$  は「となりの辺 ÷ 斜辺」です。

(ウ) は正しいです。 $\tan A$  は「向かい側の辺 ÷ となりの辺」なので、斜辺を使いません。

(エ) は正しいです。同じ角をもつ直角三角形は相似なので、対応する辺の比は変わりません。

したがって、正しいものは (ア)、(ウ)、(エ) です。