第 044 講 単振動のエネルギー

この講でできるようになること

- 単振動における運動エネルギーと位置エネルギーの交換を、物体の位置と結びつけて説明できる。
- 力学的エネルギーの保存から、任意の位置での速さや折り返し点を求められる。
- 振幅や質量が異なる単振動について、全エネルギーと最大の速さを比較できる。
- 鉛直ばねの自然長とつり合いの位置を区別し、重力を含む位置エネルギーを正しく扱える。

1. 速さが変わってもエネルギーは保存される

ばねにつながれた物体を引っ張って離すと、物体は左右に往復する。両端では一瞬止まり、中央を通過するときには速さが最大になる。

物体の速さは絶えず変化するが、摩擦や空気抵抗がなければ、力学的エネルギーは保存される。

この関係を使うと、運動の時刻を計算しなくても、物体の位置から速さを求めることができる。

水平ばねの単振動

左端を固定した理想的な軽いばねに、質量 m の物体がつながれている場合を考える。

次の条件を仮定する。

- 物体を質点として扱い、ばねの質量は無視できる。
- 水平面は滑らかで、摩擦や空気抵抗は働かない。
- ばねの左端は固定され、ばね定数 $k>0$ は一定である。
- ばねはフックの法則が成り立つ範囲で伸び縮みする。
- 物体の質量 $m>0$ は運動中に変化しない。

水平面では重力と垂直抗力が鉛直方向につり合う。水平運動を変化させる力はばねの弾性力だけである。

ばねが自然長となる位置をつり合いの位置 O とし、そこを $x=0$ とする。右向きを正にとる。

©ミライコーチング

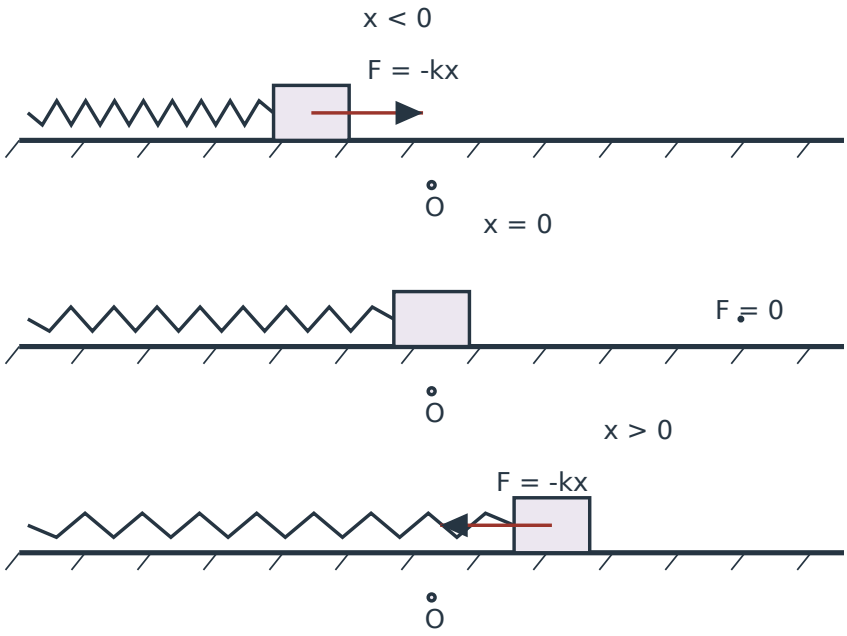

図 1　各段は同じ装置の異なる時刻。横方向の合力だけを示す。右正。

図の 3 段は、物体が上下に動く様子ではなく、同じ水平ばねの異なる状態を並べたものである。

つり合いの位置からの変位を x、物体の符号付き速度を v とすると、ばねが物体に及ぼす水平方向の力は

$$F = -kx$$

である。

$x > 0$ では左向き、$x < 0$ では右向きに力が働き、どちらの場合も物体をつり合いの位置へ戻そうとする。

このような力を復元力という。

2. 運動エネルギーと位置エネルギーの交換

2 つのエネルギー

動いている物体がもつ運動エネルギーを K とする。

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

ここで v は符号付き速度であるが、二乗するため K は速度の向きによらず、速さだけで決まる。

一方、水平ばねの弾性エネルギーを U とする。この装置では自然長とつり合いの位置が一致しているので、$U = 0$ を $x = 0$ にとれば、

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

である。

ばねが伸びていても縮んでいても、x^2 が同じなら弾性エネルギーは等しい。

単振動の力学的エネルギー保存

理想的な水平ばねの単振動では、運動エネルギー K と弾性エネルギー U の和が一定に保たれる。

$$E = K + U$$

したがって、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

が成り立つ。

E は保存される力学的エネルギーであり、単位は J（ジュール）である。

中央と両端で何が起こるか

つり合いの位置からの最大変位の大きさを振幅 A とする。振幅は負にならず、$A \geq 0$ である。

まず、$A > 0$ の往復運動を考える。

右端 $x = +A$ と左端 $x = -A$ は折り返し点である。どちらも一瞬だけ速度が 0 となるので、

$$K = 0, \qquad U = E$$

が成り立つ。

このとき、

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

である。

一方、中央 $x = 0$ では $U = 0$ となる。したがって、

$$K = E, \qquad U = 0$$

となり、速さが最大になる。

物体の位置	弾性エネルギー U	運動エネルギー K	速さ
左端 $x = -A$	E	0	0
中央 $x = 0$	0	E	最大
右端 $x = +A$	E	0	0

両端から中央へ向かうときには、弾性エネルギーが減少し、その分だけ運動エネルギーが増加する。

中央から両端へ向かうときには、その逆の変化が起こる。

エネルギーが消えて別のものに変わるのではなく、**2 種類のエネルギーの配分が変わる**のである。

折り返し点では速さが 0 でも加速度は 0 ではない

折り返し点では $v = 0$ だが、$A > 0$ なら復元力 $F = -kx$ は 0 ではない。

©ミライコーチング

加速度 a は運動方程式 $ma = -kx$ から

$$a = -\frac{k}{m}x$$

となる。

したがって、右端では左向き、左端では右向きに加速度が生じる。速さが一瞬 0 になることと、力や加速度が 0 になることは異なる。

3. 位置から速さを求める

エネルギー保存の式に、折り返し点でのエネルギー $E = \frac{1}{2}kA^2$ を代入する。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

これを整理すると、

$$mv^2 = k\left(A^2 - x^2\right)$$

となる。

速さは $|\,v\,|$ であるから、

$$|\,v\,| = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

を得る。

この式から、次のことが分かる。

- $x = 0$ のとき、速さは最大となる。
- $x = \pm A$ のとき、速さは 0 となる。
- x と $-x$ では、速さが等しい。
- 同じ位置で右向きに動く場合と左向きに動く場合がある。

中央での最大の速さを $v_{\max}$ と書くと、

$$v_{\max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。

速度の符号はエネルギーだけでは決まらない

エネルギーの式は v^2 を含むので、求まるのは速さである。

速度そのものは、右向きに動くなら正、左向きに動くなら負となる。

例えば、ある位置での速さが $0.80\,\mathrm{m/s}$ と求まっても、運動方向が与えられていなければ、

$$v = \pm 0.80\,\mathrm{m/s}$$

のどちらも考えられる。

速度の符号を決めるには、現在の進行方向や直前の運動状態など、追加の情報が必要である。

到達できる位置の条件

運動エネルギーは負にならないので、

$$K = E - U \geq 0$$

でなければならない。

したがって、物体が到達できる位置では、

$$E \geq U$$

が必要である。

水平ばねの場合、

$$\frac{1}{2}kA^2 \geq \frac{1}{2}kx^2$$

より、

$$-A \leq x \leq A$$

となる。

折り返し点は $E = U$ が成立する位置である。$U > E$ となる位置には、その全エネルギーのままでは到達できない。

4. エネルギー保存を使った具体的な計算

例題 1

滑らかな水平面上で、ばね定数 $k = 20\,\mathrm{N/m}$ の軽いばねに、質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ の物体が取り付けられている。

ばねの左端は固定され、物体は振幅 $A = 0.20\,\mathrm{m}$ で単振動している。右向きを正、つり合いの位置を $x = 0$ とし、そこで弾性エネルギーを 0 とする。ばねはフックの法則の範囲内で動き、摩擦や空気抵抗はない。

例題 1(1) 全エネルギー E と、つり合いの位置での最大の速さを求めよ。

例題 1(2) 物体が $x = +0.10\,\mathrm{m}$ にあるときの弾性エネルギー U、運動エネルギー K、速さを求めよ。また、この情報だけで速度の符号が決まるか答えよ。

例題 1(3) $U = K$ となる位置と、その位置での速さを求めよ。

例題 1(4) 左右の折り返し点での加速度をそれぞれ求めよ。また、物体が $x = +0.25\,\mathrm{m}$ に到達できるか、エネルギーを用いて判断せよ。

例題 1 の解答・解説

例題 1(1) 全エネルギーは、折り返し点での弾性エネルギーに等しい。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kA^2 \\ &= \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.20\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.40\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

つり合いの位置では $U = 0$ なので、$K = 0.40\,\mathrm{J}$ となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{\max}^2 &= E \\ v_{\max} &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(0.40\,\mathrm{J})}{0.50\,\mathrm{kg}}} \\ &\approx 1.265\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

よって、全エネルギーは 0.40 J、最大の速さは約 1.265 m/s である。

例題 1(2) まず、位置 $x = +0.10\,\mathrm{m}$ での弾性エネルギーを求める。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.10\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

保存される全エネルギーは 0.40 J なので、

$$\begin{aligned} K &= E - U \\ &= 0.40\,\mathrm{J} - 0.10\,\mathrm{J} \\ &= 0.30\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

運動エネルギーから速さを求める。

$$\begin{aligned} |\,v\,| &= \sqrt{\frac{2K}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(0.30\,\mathrm{J})}{0.50\,\mathrm{kg}}} \\ &\approx 1.095\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

求めた速さは約 1.095 m/s である。右向きに進む途中なら $v > 0$、左向きに戻る途中なら $v < 0$ なので、位置とエネルギーの情報だけでは符号は決まらない。

また、$x = +0.10\,\mathrm{m}$ は振幅の半分の位置であるが、弾性エネルギーは全エネルギーの半分ではない。変位が振幅の半分なら、二乗に比例する弾性エネルギーは全体の $\frac{1}{4}$ になる。

例題 1(3) $U = K$ であり、$E = U + K$ だから、それぞれのエネルギーは

$$U = K = \frac{0.40\,\mathrm{J}}{2} = 0.20\,\mathrm{J}$$

である。

$U = \frac{1}{2}kx^2$ より、

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}E$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2}$$

したがって、

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{A}{\sqrt{2}} \\ &= \pm\frac{0.20\,\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \\ &\approx \pm 0.1414\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

この位置での速さは、

$$\begin{aligned} |\,v\,| &= \sqrt{\frac{2K}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(0.20\,\mathrm{J})}{0.50\,\mathrm{kg}}} \\ &\approx 0.8944\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

例題 1(4) 加速度は $a = -\frac{k}{m}x$ で求まる。

左端 $x = -0.20\,\mathrm{m}$ では、

$$\begin{aligned} a &= -\frac{20\,\mathrm{N/m}}{0.50\,\mathrm{kg}}(-0.20\,\mathrm{m}) \\ &= +8.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となり、右向きである。

右端 $x = +0.20\,\mathrm{m}$ では、

$$a = -\frac{20\,\mathrm{N/m}}{0.50\,\mathrm{kg}}(+0.20\,\mathrm{m})$$

$$= -8.0\,\mathrm{m/s^2}$$

となり、左向きである。

一方、$x = +0.25\,\mathrm{m}$ で必要な弾性エネルギーは、

$$U = \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.25\,\mathrm{m})^2$$

$$= 0.625\,\mathrm{J}$$

であり、$E = 0.40\,\mathrm{J}$ を超えている。

もし到達すると仮定すれば、

$$K = 0.40\,\mathrm{J} - 0.625\,\mathrm{J} = -0.225\,\mathrm{J}$$

となる。しかし運動エネルギーは負になれないため、到達できない。

エネルギーをグラフで確かめる

例題 1 の運動について、横軸をつり合いからの変位 x、縦軸をエネルギーとして考える。

このグラフは位置とエネルギーの関係を表すものであり、時間変化を表すグラフではない。

まず、弾性エネルギー U は x^2 に比例する。

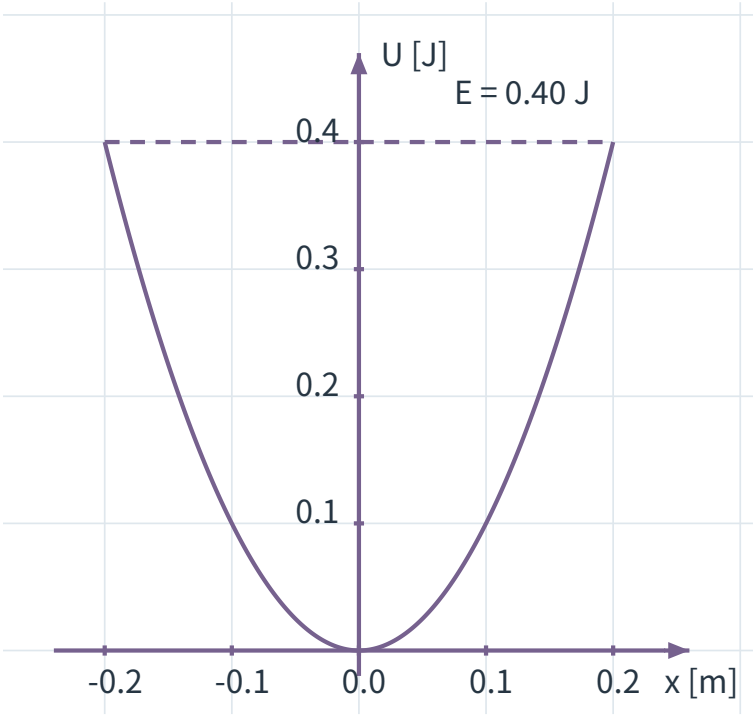

図 2　横 1 目盛 0.10m、縦 1 目盛 0.10J。実線は U、破線は保存エネルギー E。

中央で $U = 0$ となり、左右に離れるほど U が増加する。破線 $E = 0.40\,\mathrm{J}$ との交点が、左右の折り返し点に対応する。

次に、運動エネルギー $K = E - U$ を見る。

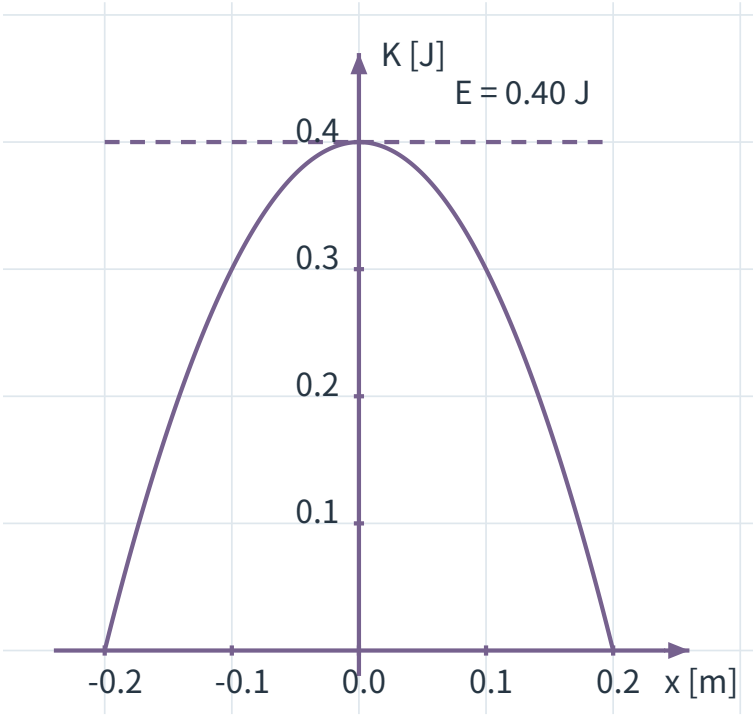

図 3　横 1 目盛 0.10m、縦 1 目盛 0.10J。実線は K、破線は保存エネルギー E。

K は中央で最大となり、両端で 0 になる。左右どちらに動いているかに関係なく、同じ位置では同じ K の値をとる。

2 つのグラフは横軸と縦軸の目盛がそろっているため、同じ x における U と K を対応させて読むことができる。

ただし、異なる位置から読み取った U と K を足しても、その瞬間の全エネルギーを求めたことにはならない。

エネルギーの配分を棒の長さで表す

同じ運動の 3 つの位置について、エネルギーを棒の長さで比較する。

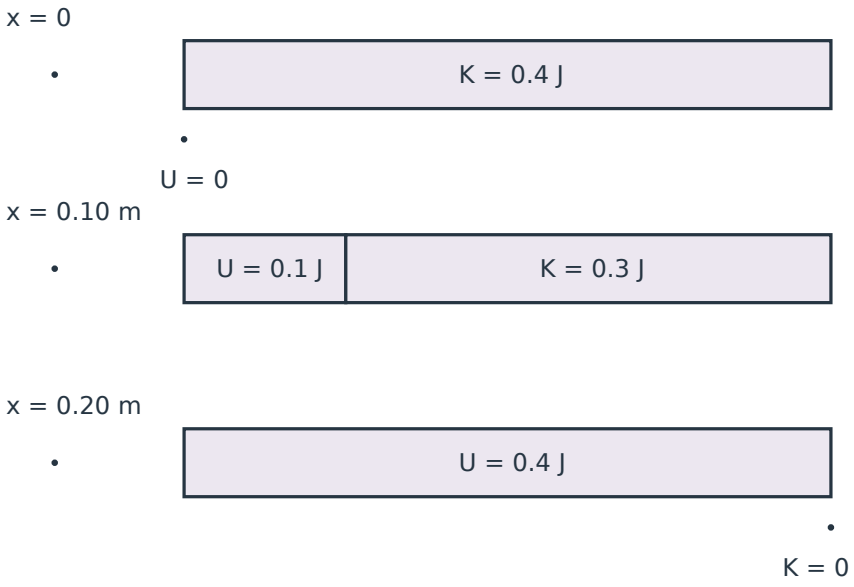

図 4　同じ横幅が同じ総エネルギー 0.40J。棒の長さはエネルギーの大きさ。

棒の横方向の並びは物体の位置を表すものではない。棒の長さが、それぞれのエネルギーの大きさを表している。

中央から端へ移動すると K の棒が短くなり、U の棒が長くなる。しかし、同じ位置に対応する 2 つのエネルギーの和は常に $0.40\,\mathrm{J}$ である。

位置と速さをエネルギーから読む

単振動の問題では、まず保存される全エネルギーを確定する。

その後、調べたい位置の位置エネルギーを求め、

$$K = E - U$$

から運動エネルギー、さらに速さを求める。

- U が小さい位置ほど速さは大きい。
- $U = E$ なら折り返し点である。
- $U > E$ ならその位置には到達できない。
- 速度の符号は、エネルギーとは別に運動方向から判断する。

---

5. 初期位置と初速度から振幅を求める

振幅が直接与えられていなくても、ある瞬間の位置と速度から決めることができる。

最初に観察した時刻の位置を x_0、符号付き速度を v_0 とする。

エネルギー保存より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

である。

整理すると、

$$A^2 = x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2$$

となるので、

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$$

を得る。

振幅は非負の値として求める。初速が 0 でない場合、最初に観察した位置は折り返し点ではない。

例題 2

例題 1 と同じ質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$、ばね定数 $k = 20\,\mathrm{N/m}$ の水平ばねを考える。摩擦や空気抵抗はなく、ばねはフックの法則の範囲内で動く。

つり合いの位置を $x = 0$、右向きを正とし、最初に観察した瞬間の位置が $x_0 = +0.10\,\mathrm{m}$、速度が $v_0 = +0.60\,\mathrm{m/s}$ であった。

例題 2(1) この運動の全エネルギーと振幅を求めよ。

例題 2(2) 最初に観察した位置は折り返し点か。理由を述べよ。また、その後の最初の折り返し点を答えよ。

例題 2(3) 物体が最初の折り返し点から戻り、再び $x = +0.10\,\mathrm{m}$ を通過するときの符号付き速度を求めよ。

例題 2 の解答・解説

例題 2(1) 最初に観察した瞬間の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.50\,\mathrm{kg})(0.60\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 0.090\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2}kx_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.10\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} E &= K_0 + U_0 \\ &= 0.090\,\mathrm{J} + 0.10\,\mathrm{J} \\ &= 0.190\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

この全エネルギーを折り返し点の弾性エネルギーと等しくする。

$$\frac{1}{2}kA^2 = E$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(0.190\,\mathrm{J})}{20\,\mathrm{N/m}}}$$

$$= \sqrt{0.019\,\mathrm{m}^2}$$

$$\approx 0.1378\,\mathrm{m}$$

よって、全エネルギーは $0.190\,\mathrm{J}$、振幅は約 $0.1378\,\mathrm{m}$ である。

例題 2(2) 最初に観察した瞬間には、速度が $+0.60\,\mathrm{m/s}$ であり、物体は動いている。したがって、折り返し点ではない。

また、物体は右向きに進んでいるため、その後に最初に到達する折り返し点は右端の

$$x = +A \approx +0.1378\,\mathrm{m}$$

である。

例題 2(3) 同じ $x = +0.10\,\mathrm{m}$ では、弾性エネルギーが同じなので、速さも最初に観察したときと等しい。

ただし、右端で折り返した後は左向きに動く。右向きを正にとっているので、

$$v = -0.60\,\mathrm{m/s}$$

となる。

エネルギーから速さが分かり、運動の経過から速度の符号が決まる例である。

初期状態が静止の特別な場合

初速度が 0 のときは、

$$A = |\,x_0\,|$$

となる。

$x_0 \neq 0$ なら、最初に観察した位置は折り返し点であり、復元力によって動き始める。

これに対し、$x_0 = 0$ かつ $v_0 = 0$ なら、

$$A = 0, \qquad E = 0$$

である。物体はつり合いの位置で静止し続ける。

したがって、初速度が 0 という条件だけでは、振動するか静止し続けるかは判断できない。初期位置も確認する必要がある。

6. 振幅や質量が変わるとエネルギーはどう変わるか

振幅だけを変えた場合

同じ物体、同じばねを用い、振幅だけが異なる 2 つの単振動を比較する。

全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

なので、k が一定なら E は振幅の二乗に比例する。

振幅を A から $2A$ にすると、

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}k(2A)^2 \\ &= 4E \end{aligned}$$

となる。

一方、最大の速さは

$$v_{\max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

なので、m と k が一定なら振幅に比例する。

したがって、振幅を 2 倍にすると、**全エネルギーは 4 倍、最大の速さは 2 倍**になる。

例えば、例題 1 の運動で振幅だけを $0.20\,\mathrm{m}$ から $0.40\,\mathrm{m}$ に変えた別の振動を考える。

このとき、

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.40\,\mathrm{m})^2 \\ &= 1.60\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

であり、最大の速さは

$$\begin{aligned} {v_{\max}}' &= (0.40\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{20\,\mathrm{N/m}}{0.50\,\mathrm{kg}}} \\ &\approx 2.530\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

理想的な線形ばねでは周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

であり、振幅に依存しない。振幅を 2 倍にしても、周期は変わらない。

ただし、これはばねが引き続きフックの法則の範囲内で動く場合の関係である。

質量だけを変えた場合

次に、ばね定数 k と振幅 A を同じにして、質量だけが異なる 2 つの単振動を比較する。

全エネルギー $E = \frac{1}{2}kA^2$ には質量が含まれないため、k と A が同じなら全エネルギーは等しい。

一方、最大の速さは

$$v_{\max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

なので、質量が大きいほど小さくなる。

例題 1 の $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ を比較対象とし、別の装置で $m' = 1.0\,\mathrm{kg}$、$k = 20\,\mathrm{N/m}$、$A = 0.20\,\mathrm{m}$ と設定すると、

$$E' = 0.40\,\mathrm{J}$$

であり、

$$\begin{aligned} {v_{\max}}' &= \sqrt{\frac{2(0.40\,\mathrm{J})}{1.0\,\mathrm{kg}}} \\ &\approx 0.8944\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

最大の速さは元の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍となり、周期は $\sqrt{2}$ 倍となる。

質量を変更する比較は別々の運動として考える

ここで比較しているのは、質量と振幅をそれぞれ設定した別々の単振動である。

振動している途中で物体を付け足したり、取り外したりする過程に、変更前後のばねと物体の力学的エネルギー保存をそのまま適用しているわけではない。

途中の質量変更では、付け替えの操作や接触によるエネルギーの受け渡しを別に考える必要がある。

7. 鉛直ばねの位置エネルギー

ここまでは水平ばねを考えてきた。

では、ばねを天井から鉛直につるし、その下端に物体を取り付けた場合はどうなるだろうか。

鉛直方向にはばねの弾性力だけでなく、重力も働く。したがって、弾性エネルギーだけを位置エネルギーとして扱うことはできない。

自然長とつり合いの位置を分ける

質量 m の物体を軽いばねの下端につけ、上端を固定する。ばね定数は k、重力加速度の大きさは g とする。

ばねが自然長から伸びた長さを δ とする。

物体がつり合っているときの伸びを δ_0 とすると、上向きの弾性力と下向きの重力の大きさが等しいので、

$$k\delta_0 = mg$$

である。

したがって、

$$\delta_0 = \frac{mg}{k}$$

となる。

ここで、つり合いの位置を新しい原点 $x = 0$ とし、鉛直下向きを正にとる。

自然長からの伸び δ と、つり合いからの変位 x には、

$$\delta = \delta_0 + x$$

という関係がある。

$x = 0$ でも、ばねは自然長ではなく δ_0 だけ伸びている。

ばねと重力の位置エネルギー

ばねの弾性エネルギーを U_{s} とする。自然長を基準にすれば、

$$U_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}k(\delta_0 + x)^2$$

である。

一方、重力による位置エネルギーを U_{g} とする。

つり合いの高さで $U_{\mathrm{g}} = 0$ と定めると、下向きを正にとっているため、

$$U_{\mathrm{g}} = -mgx$$

となる。

下に移動すると重力による位置エネルギーは減少し、上に移動すると増加する。

両者の和は、

$$U_{\mathrm{s}} + U_{\mathrm{g}} = \frac{1}{2}k(\delta_0 + x)^2 - mgx$$

である。

これを展開すると、

$$U_{\mathrm{s}} + U_{\mathrm{g}} = \frac{1}{2}k\delta_0^2 + k\delta_0 x + \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

となる。

つり合いの条件 $k\delta_0 = mg$ より、$k\delta_0 x$ と mgx が打ち消し合う。

その結果、

$$U_{\mathrm{s}} + U_{\mathrm{g}} = \frac{1}{2}k\delta_0^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

を得る。

有効位置エネルギー

位置エネルギーの基準は、一定の値だけずらしても物体の運動に影響しない。

そこで、つり合いの位置における位置エネルギーの和 $\frac{1}{2}k\delta_0^2$ を差し引き、

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{s}} + U_{\text{g}} - \frac{1}{2}k\delta_0^2$$

と定める。

これを有効位置エネルギーと呼ぶ。

すると、

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2}kx^2$$

となる。

これは水平ばねの場合と同じ形である。

鉛直ばねでもつり合いを基準にできる

鉛直ばねでも、つり合いの位置から変位を測れば、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

という形でエネルギー保存を使える。

ただし、ここでの $\frac{1}{2}kx^2$ は、ばねの弾性エネルギー単独ではなく、重力の位置エネルギーも含めて基準を調整した有効位置エネルギーである。

重力が消えたわけではない。

8. 鉛直ばねの具体例

例題 3

天井に固定された軽い鉛直ばねの下端に、質量 $m = 0.50\,\text{kg}$ の物体が取り付けられている。

ばね定数は $k = 20\,\text{N/m}$、重力加速度の大きさは $g = 10\,\text{m/s}^2$ とする。摩擦や空気抵抗はなく、ばねはフックの法則の範囲内で動く。

自然長からの伸びを δ、つり合いからの変位を x とし、下向きを正にとる。重力による位置エネルギーはつり合いの高さで 0 とする。

例題 3(1) つり合いの位置で、ばねが自然長から伸びている長さ δ_0 を求めよ。

例題 3(2) $x = -0.10\,\text{m}$、$x = 0$、$x = +0.10\,\text{m}$ の各位置について、弾性エネルギー U_{s}、重力による位置エネルギー U_{g}、それらの和を求めよ。

例題 3(3) 各位置での有効位置エネルギー U_{eff} を求め、水平ばねと同じ形の式になることを確かめよ。

例題 3 の解答・解説

例題 3(1) つり合いの条件 $k\delta_0 = mg$ より、

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{(0.50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})}{20\,\mathrm{N/m}} \\ &= 0.25\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

となる。

したがって、つり合いの位置でも、ばねは自然長から $0.25\,\mathrm{m}$ 伸びている。

例題 3(2) ばねの伸びは $\delta = \delta_0 + x$ である。

$x = -0.10\,\mathrm{m}$ では、

$$\delta = 0.25\,\mathrm{m} - 0.10\,\mathrm{m} = 0.15\,\mathrm{m}$$

となる。

弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.15\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.225\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

である。

重力による位置エネルギーは、

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{g}} &= -mgx \\ &= -(0.50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-0.10\,\mathrm{m}) \\ &= +0.50\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

したがって、和は $0.725\,\mathrm{J}$ である。

$x = 0$ では $\delta = 0.25\,\mathrm{m}$ なので、

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.25\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.625\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。この位置では $U_{\mathrm{g}} = 0$ であるため、和は $0.625\,\mathrm{J}$ である。

$x = +0.10\,\mathrm{m}$ では $\delta = 0.35\,\mathrm{m}$ となる。

$$U_\mathrm{s} = \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.35\,\mathrm{m})^2$$
$$= 1.225\,\mathrm{J}$$

重力による位置エネルギーは、

$$U_\mathrm{g} = -(0.50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(+0.10\,\mathrm{m})$$
$$= -0.50\,\mathrm{J}$$

である。

よって、和は $0.725\,\mathrm{J}$ となる。

例題 3(3) つり合いの位置における $U_\mathrm{s} + U_\mathrm{g}$ は $0.625\,\mathrm{J}$ である。

この一定値を各位置の和から差し引くと、

$$U_\mathrm{eff}(-0.10\,\mathrm{m}) = 0.725\,\mathrm{J} - 0.625\,\mathrm{J}$$
$$= 0.10\,\mathrm{J}$$
$$U_\mathrm{eff}(0) = 0$$
$$U_\mathrm{eff}(+0.10\,\mathrm{m}) = 0.725\,\mathrm{J} - 0.625\,\mathrm{J}$$
$$= 0.10\,\mathrm{J}$$

となる。

一方、

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m})^2 = 0.10\,\mathrm{J}$$

なので、$x = \pm 0.10\,\mathrm{m}$ の両方で有効位置エネルギーと一致する。

つり合いの位置でも両者は 0 となる。

自然長とつり合いの位置を図で確認する

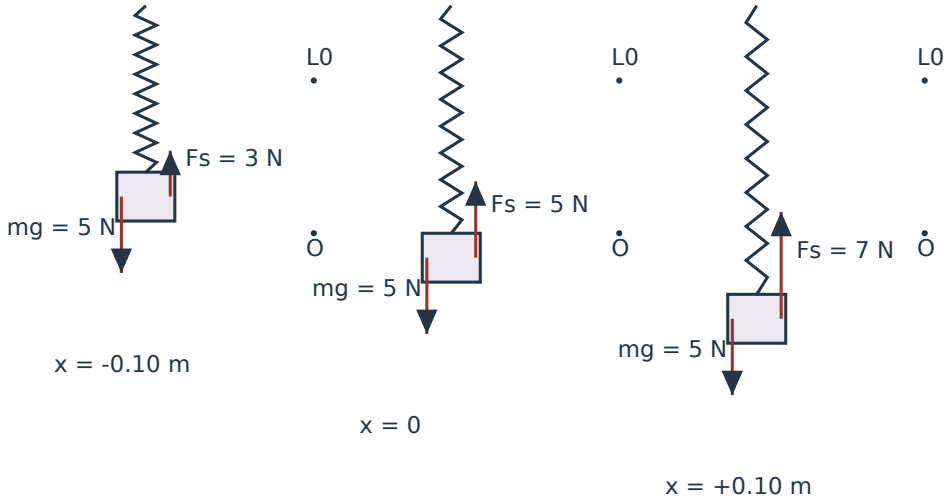

図 5　下向き正。m=.50kg、g=10m/s²、k=20N/m。自然長 L0 とつり合い O を区別。

図の L_0 はばねが自然長のときの下端位置、O はつり合いの伸びに対応する下端位置の基準を示している。

質点として追跡する物体の中心とばねの下端には固定された位置のずれがあるが、ばねの下端と物体の中心は同じ距離だけ上下する。したがって、どちらを追跡しても変位 x は同じである。

図の左・中央・右は、同じ鉛直ばねの異なる状態であり、横方向の配置は実際の運動方向を表さない。

各位置のエネルギーを整理すると、次のようになる。

量	$x=-0.10\,\mathrm{m}$	$x=0$	$x=+0.10\,\mathrm{m}$
自然長からの伸び δ	$0.15\,\mathrm{m}$	$0.25\,\mathrm{m}$	$0.35\,\mathrm{m}$
ばねの弾性エネルギー U_s	$0.225\,\mathrm{J}$	$0.625\,\mathrm{J}$	$1.225\,\mathrm{J}$
重力による位置エネルギー U_g	$+0.50\,\mathrm{J}$	0	$-0.50\,\mathrm{J}$
和 $U_\mathrm{s}+U_\mathrm{g}$	$0.725\,\mathrm{J}$	$0.625\,\mathrm{J}$	$0.725\,\mathrm{J}$
有効位置エネルギー U_eff	$0.10\,\mathrm{J}$	0	$0.10\,\mathrm{J}$

例えば、つり合いの位置から $0.10\,\mathrm{m}$ 下がると、ばねの弾性エネルギーは $0.600\,\mathrm{J}$ 増えるが、重力による位置エネルギーは $0.50\,\mathrm{J}$ 減る。

その結果、位置エネルギーの和の増加は $0.10\,\mathrm{J}$ となる。

位置エネルギーの基準を変更しても、2 つの状態間での位置エネルギーの差は変わらない。そのため、エネルギー保存から求める速さも変わらない。

鉛直ばねで混同しやすい 3 つの量

自然長からの伸びは δ、つり合いからの変位は x であり、$\delta = \delta_0 + x$ である。

ばね単独の弾性エネルギーは $U_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}k\delta^2$ であって、一般に $\frac{1}{2}kx^2$ ではない。

$\frac{1}{2}kx^2$ は、重力による位置エネルギーを合わせ、つり合いを基準に調整した有効位置エネルギーである。

9. ほかの単振動にも使える考え方

復元力が、つり合いからの変位 x に比例して逆向きに働く運動を考える。

$$F = -\kappa x$$

ここで $\kappa > 0$ は復元力の比例係数であり、単位は N/m である。

運動が角振動数 ω の単振動であれば、

$$\kappa = m\omega^2$$

の関係がある。

理想的な線形単振動では、つり合いの位置を有効位置エネルギーの基準にとることで、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2 = \frac{1}{2}\kappa A^2$$

と表せる。

これは、水平ばねで用いた k を有効復元係数 κ に置き換えたものである。

例えば、単振り子でも振れ角が十分に小さい場合、糸の長さを L、角度をラジアンで表したものを θ とすると、円弧に沿う変位 $s = L\theta$ を用いて近似的に単振動として扱える。

ただし、この近似を大きな振れ角へ無条件に広げたり、近似式から大振幅単振り子の厳密な周期を求めたりすることはできない。

重要なのは、使っている位置エネルギーが何を基準に定められているか、復元力が変位に比例する条件を満たしているかを確かめることである。

©ミライコーチング

演習問題

演習 1

滑らかな水平面上で、質量 $m = 0.40\,\mathrm{kg}$ の物体が、ばね定数 $k = 40\,\mathrm{N/m}$ の軽いばねにつながれている。ばねの一端は固定され、振幅 $A = 0.10\,\mathrm{m}$ で単振動している。摩擦や空気抵抗はなく、フックの法則が成り立つ。

つり合いの位置を $x = 0$、右向きを正とし、そこで弾性エネルギーを 0 とする。

演習 1(1) 全エネルギーと中央での最大の速さを求めよ。

演習 1(2) $x = +0.060\,\mathrm{m}$ にあるときの弾性エネルギー、運動エネルギー、速さを求めよ。

演習 1(3) 演習 1(2)の位置で物体が左向きに動いているとき、符号付き速度を求めよ。

演習 1(4) 左端 $x = -0.10\,\mathrm{m}$ での復元力と加速度を、符号付きで求めよ。

対応する解答・解説は、末尾の「演習 1 の解答・解説」を参照せよ。

演習 2

質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$、ばね定数 $k = 32\,\mathrm{N/m}$、振幅 $A = 0.25\,\mathrm{m}$ の理想的な水平ばねの単振動を考える。

ばねの左端は固定され、摩擦や空気抵抗はない。つり合いの位置を $x = 0$、右向きを正とし、そこで弾性エネルギーを 0 とする。

演習 2(1) 全エネルギー E を求めよ。

演習 2(2) 運動エネルギーと弾性エネルギーが等しくなる位置、およびその位置での速さを求めよ。

演習 2(3) 物体が $x = +0.30\,\mathrm{m}$ に到達できるか判断し、その理由をエネルギーの数値で説明せよ。

対応する解答・解説は、末尾の「演習 2 の解答・解説」を参照せよ。

演習 3

質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ の物体が、ばね定数 $k = 8.0\,\mathrm{N/m}$ の軽いばねにつながれ、摩擦のない水平面上を単振動している。

つり合いの位置を $x = 0$、右向きを正とする。最初に観察した瞬間の位置は $x_0 = +0.10\,\mathrm{m}$、速度は $v_0 = -0.40\,\mathrm{m/s}$ であった。

演習 3(1) 最初に観察した瞬間の運動エネルギー、弾性エネルギー、全エネルギーを求めよ。

演習 3(2) 振幅 A を求めよ。

演習 3(3) 最初に観察した位置は折り返し点か。また、その後に最初に到達する折り返し点はどちら側か。理由とともに答えよ。

対応する解答・解説は、末尾の「演習 3 の解答・解説」を参照せよ。

©ミライコーチング

演習 4

次の 3 つの理想的な水平ばねの単振動を比較する。いずれも軽いばねの一端を固定し、摩擦や空気抵抗はなく、フックの法則が成り立つ範囲内で運動する。

系	質量 m	ばね定数 k	振幅 A
P	$0.50\,\mathrm{kg}$	$20\,\mathrm{N/m}$	$0.20\,\mathrm{m}$
Q	$0.50\,\mathrm{kg}$	$20\,\mathrm{N/m}$	$0.40\,\mathrm{m}$
R	$1.0\,\mathrm{kg}$	$20\,\mathrm{N/m}$	$0.20\,\mathrm{m}$

各系でつり合いの位置を $x=0$ とし、そこで弾性エネルギーを 0 とする。

演習 4(1) 系 Q の全エネルギーと最大の速さは、それぞれ系 P の何倍か。また、周期はどうなるか答えよ。

演習 4(2) 系 R の全エネルギーと最大の速さは、それぞれ系 P の何倍か。また、周期はどうなるか答えよ。

演習 4(3) この比較から「振動中の P に質量を付け足しても、付け足す前のエネルギーがそのまま保存される」と結論できるか。理由を説明せよ。

対応する解答・解説は、末尾の「演習 4 の解答・解説」を参照せよ。

演習 5

天井に固定された軽い鉛直ばねの下端に、質量 $m=0.20\,\mathrm{kg}$ の物体を取り付ける。

ばね定数は $k=10\,\mathrm{N/m}$、重力加速度の大きさは $g=10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。摩擦や空気抵抗はなく、ばねはフックの法則の範囲内で動く。

自然長からの伸びを δ、つり合いの位置から下向きに測った変位を x とし、重力による位置エネルギーはつり合いの高さで 0 とする。

演習 5(1) つり合いの伸び δ_0 を求めよ。

演習 5(2) $x=-0.10\,\mathrm{m}$、$x=0$、$x=+0.10\,\mathrm{m}$ の各位置について、ばねの弾性エネルギー、重力による位置エネルギー、それらの和、有効位置エネルギーを求めよ。

演習 5(3) 物体を $x=-0.10\,\mathrm{m}$ の位置で静かに離した場合、つり合いの位置を通過するときの速さを求めよ。

演習 5(4) 鉛直ばねで $\frac{1}{2}kx^2$ をばね単独の弾性エネルギーと呼んではいけない理由を説明せよ。

対応する解答・解説は、末尾の「演習 5 の解答・解説」を参照せよ。

©ミライコーチング

演習 6

固定端をもつ理想的な水平ばねと質量 $m > 0$ の物体を考える。ばね定数は $k > 0$、摩擦や空気抵抗はなく、自然長とつり合いの位置は一致している。

つり合いの位置を $x = 0$、右向きを正とする。次の小問は、それぞれ指定された状態について考えよ。

演習 6(1) 物体を $x = 0$ で初速度 $v_0 = 0$ のまま離した。振幅と全エネルギーを求め、その後の運動を説明せよ。

演習 6(2) 振幅 $A > 0$ で振動している物体が右端 $x = +A$ に到達した瞬間について、速度と加速度を求めよ。また、加速度の向きを答えよ。

演習 6(3) 振幅 $A > 0$ の運動で、物体が中央 $x = 0$ を通過している瞬間について、弾性エネルギー、運動エネルギー、加速度をそれぞれ求めよ。

演習 6(4) 振幅 $A > 0$ の単振動で、ある位置の弾性エネルギーが分かれば、その位置での符号付き速度まで必ず一意に決まるか。理由を説明せよ。

対応する解答・解説は、末尾の「演習 6 の解答・解説」を参照せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1) 全エネルギーは、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kA^2 \\ &= \frac{1}{2}(40\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

中央では弾性エネルギーが 0 となり、全エネルギーが運動エネルギーとなる。

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(0.20\,\mathrm{J})}{0.40\,\mathrm{kg}}} \\ &= 1.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

したがって、全エネルギーは 0.20 J、最大の速さは 1.0 m/s である。

演習 1(2) $x = +0.060\,\mathrm{m}$ での弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}(40\,\mathrm{N/m})(0.060\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.072\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} K &= E - U \\ &= 0.20\,\mathrm{J} - 0.072\,\mathrm{J} \\ &= 0.128\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

速さは、

$$\begin{aligned} |\,v\,| &= \sqrt{\frac{2K}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(0.128\,\mathrm{J})}{0.40\,\mathrm{kg}}} \\ &= 0.80\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

演習 1(3) 物体は左向きに動いており、右向きを正にとっている。

したがって、演習 1(2)で求めた速さに負の符号を付け、

$$v = -0.80\,\mathrm{m/s}$$

となる。

演習 1(4) 左端では $x = -0.10\,\mathrm{m}$ である。

復元力は、

$$\begin{aligned} F &= -kx \\ &= -(40\,\mathrm{N/m})(-0.10\,\mathrm{m}) \\ &= +4.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ &= \frac{+4.0\,\mathrm{N}}{0.40\,\mathrm{kg}} \\ &= +10\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

したがって、復元力は右向きに 4.0 N、加速度は右向きに $10\,\mathrm{m/s^2}$ となる。

左端で速度が 0 になっても、ばねの復元力は働いている。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1) 折り返し点では運動エネルギーが 0 となるため、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kA^2 \\ &= \frac{1}{2}(32\,\mathrm{N/m})(0.25\,\mathrm{m})^2 \\ &= 1.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

演習 2(2) 運動エネルギーと弾性エネルギーが等しいので、

$$K = U = \frac{E}{2} = 0.50\,\mathrm{J}$$

である。

このとき、

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2$$

より、

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{A}{\sqrt{2}} \\ &= \pm\frac{0.25\,\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \\ &\approx \pm 0.1768\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

また、速さは、

$$\begin{aligned} |\,v\,| &= \sqrt{\frac{2K}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(0.50\,\mathrm{J})}{0.50\,\mathrm{kg}}} \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 1.414\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

等エネルギーの位置は $x = \pm\frac{A}{2}$ ではない。弾性エネルギーが変位の二乗に比例することから、$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$ となる。

演習 2(3) $x = +0.30\,\mathrm{m}$ での弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(32\,\mathrm{N/m})(0.30\,\mathrm{m})^2 \\ &= 1.44\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

全エネルギー $1.0\,\mathrm{J}$ より大きいので、

$$E < U$$

となる。

仮に到達すると、

$$K = 1.0\,\mathrm{J} - 1.44\,\mathrm{J} = -0.44\,\mathrm{J}$$

が必要になるが、運動エネルギーが負になることはない。

したがって、$x = +0.30\,\mathrm{m}$ には到達できない。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1) 最初に観察した瞬間の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.50\,\mathrm{kg})(-0.40\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 0.040\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2}kx_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(8.0\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.040\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} E &= K_0 + U_0 \\ &= 0.040\,\mathrm{J} + 0.040\,\mathrm{J} \\ &= 0.080\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

演習 3(2) 保存される全エネルギーは、折り返し点での弾性エネルギーに等しい。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kA^2 &= E \\ A &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \\ &= \sqrt{\frac{2(0.080\,\mathrm{J})}{8.0\,\mathrm{N/m}}} \\ &= \sqrt{0.020\,\mathrm{m^2}} \\ &\approx 0.1414\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

よって、振幅は約 $0.1414\,\mathrm{m}$ である。

演習 3(3) 最初に観察した瞬間の速度は $-0.40\,\mathrm{m/s}$ であり、物体は左向きに動いている。

折り返し点では速度が 0 になるので、最初に観察した位置は折り返し点ではない。

物体は左向きに進み、その後に最初に到達する折り返し点は、

$$x = -A \approx -0.1414\,\mathrm{m}$$

である。

位置が正であることと、速度が正であることは同じではない。物体はつり合いより右側にあっても、左向きに動くことができる。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1) 系 P と系 Q では、質量 m とばね定数 k が等しく、振幅だけが 2 倍になっている。

全エネルギーは振幅の二乗に比例するため、

$$\frac{E_{\mathrm{Q}}}{E_{\mathrm{P}}} = \left(\frac{0.40\,\mathrm{m}}{0.20\,\mathrm{m}}\right)^2 = 4$$

となる。

実際に、

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{P}} &= \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.20\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.40\,\mathrm{J} \\ E_{\mathrm{Q}} &= \frac{1}{2}(20\,\mathrm{N/m})(0.40\,\mathrm{m})^2 \\ &= 1.60\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

最大の速さは振幅に比例するので、

$$\frac{v_{\max,\mathrm{Q}}}{v_{\max,\mathrm{P}}} = \frac{0.40\,\mathrm{m}}{0.20\,\mathrm{m}} = 2$$

となる。

周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ で決まり、質量とばね定数は同じなので変わらない。

したがって、系 Q の全エネルギーは 4 倍、最大の速さは 2 倍、周期は系 P と同じである。

演習 4(2) 系 P と系 R では、ばね定数 k と振幅 A が等しく、質量が 2 倍になっている。

全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

なので変わらず、

$$E_{\mathrm{R}} = E_{\mathrm{P}} = 0.40\,\mathrm{J}$$

である。

最大の速さは、

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

であるから、質量が 2 倍になると、

$$\begin{aligned}\frac{v_{\max,\mathrm{R}}}{v_{\max,\mathrm{P}}} &= \sqrt{\frac{m_{\mathrm{P}}}{m_{\mathrm{R}}}} \\ &= \sqrt{\frac{0.50\,\mathrm{kg}}{1.0\,\mathrm{kg}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となる。

周期については、

$$\begin{aligned}\frac{T_{\mathrm{R}}}{T_{\mathrm{P}}} &= \sqrt{\frac{m_{\mathrm{R}}}{m_{\mathrm{P}}}} \\ &= \sqrt{\frac{1.0\,\mathrm{kg}}{0.50\,\mathrm{kg}}} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

である。

したがって、系 R の全エネルギーは同じ、最大の速さは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍、周期は $\sqrt{2}$ 倍となる。

演習 4(3) そのようには結論できない。

今回比較した P と R は、それぞれの質量と振幅を最初から設定した別々の運動である。

振動中に質量を付け足す場合には、追加物体との接触や、付け足す操作によってエネルギーが受け渡される可能性がある。

したがって、途中の付け替え前後で、ばねと元の物体だけの力学的エネルギーがそのまま保存されるとは限らない。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1) つり合いでは、ばねの上向きの弾性力と下向きの重力がつり合う。

$$k\delta_0 = mg$$

より、

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{(0.20\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})}{10\,\mathrm{N/m}} \\ &= 0.20\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

となる。

演習 5(2) 各位置のばねの伸びは $\delta = \delta_0 + x$ である。

まず、$x = -0.10\,\mathrm{m}$ では、

$$\delta = 0.20\,\mathrm{m} - 0.10\,\mathrm{m} = 0.10\,\mathrm{m}$$

である。

弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned}U_\mathrm{s} &= \frac{1}{2}(10\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.050\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

重力による位置エネルギーは、

$$\begin{aligned}U_\mathrm{g} &= -mgx \\ &= -(0.20\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-0.10\,\mathrm{m}) \\ &= +0.20\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

である。

したがって、

$$U_\mathrm{s} + U_\mathrm{g} = 0.050\,\mathrm{J} + 0.20\,\mathrm{J} = 0.250\,\mathrm{J}$$

となる。

次に、$x = 0$ では $\delta = 0.20\,\mathrm{m}$ となる。

$$\begin{aligned}U_\mathrm{s} &= \frac{1}{2}(10\,\mathrm{N/m})(0.20\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.200\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

この位置では $U_\mathrm{g} = 0$ なので、和は $0.200\,\mathrm{J}$ である。

最後に、$x=+0.10\,\mathrm{m}$ では $\delta=0.30\,\mathrm{m}$ である。

$$U_{\mathrm{s}}=\frac{1}{2}(10\,\mathrm{N/m})(0.30\,\mathrm{m})^2$$
$$=0.450\,\mathrm{J}$$

重力による位置エネルギーは、

$$U_{\mathrm{g}}=-(0.20\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(+0.10\,\mathrm{m})$$
$$=-0.20\,\mathrm{J}$$

となる。

よって、和は $0.250\,\mathrm{J}$ である。

つり合いでの位置エネルギーの和は $0.200\,\mathrm{J}$ なので、有効位置エネルギーはこれを差し引いて求める。

結果を表にすると、次のようになる。

量	$x=-0.10\,\mathrm{m}$	$x=0$	$x=+0.10\,\mathrm{m}$
δ	$0.10\,\mathrm{m}$	$0.20\,\mathrm{m}$	$0.30\,\mathrm{m}$
U_{s}	$0.050\,\mathrm{J}$	$0.200\,\mathrm{J}$	$0.450\,\mathrm{J}$
U_{g}	$+0.20\,\mathrm{J}$	0	$-0.20\,\mathrm{J}$
$U_{\mathrm{s}}+U_{\mathrm{g}}$	$0.250\,\mathrm{J}$	$0.200\,\mathrm{J}$	$0.250\,\mathrm{J}$
U_{eff}	$0.050\,\mathrm{J}$	0	$0.050\,\mathrm{J}$

2 つの位置 $x=\pm0.10\,\mathrm{m}$ では、

$$U_{\mathrm{eff}}=\frac{1}{2}kx^2$$
$$=\frac{1}{2}(10\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m})^2$$
$$=0.050\,\mathrm{J}$$

となり、表と一致する。

演習 5(3) $x=-0.10\,\mathrm{m}$ の位置で静かに離すので、最初の運動エネルギーは 0 である。

その位置での有効位置エネルギーは $0.050\,\mathrm{J}$ なので、保存される有効な全エネルギーは、

$$E_{\mathrm{eff}}=0.050\,\mathrm{J}$$

である。

つり合いの位置では $U_{\text{eff}} = 0$ となるため、このエネルギーはすべて運動エネルギーになる。

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{eff}}$$

$$|\,v\,| = \sqrt{\frac{2E_{\text{eff}}}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(0.050\,\text{J})}{0.20\,\text{kg}}}$$

$$\approx 0.7071\,\text{m/s}$$

したがって、速さは約 $0.7071\,\text{m/s}$ である。

演習 5(4) 鉛直ばねでは、つり合いの位置においても、ばねは自然長から δ_0 だけ伸びている。

ばね単独の弾性エネルギーは、自然長からの伸び δ を使って、

$$U_{\text{s}} = \frac{1}{2}k\delta^2$$

と表される。

一方、$\frac{1}{2}kx^2$ は、ばねの弾性エネルギーと重力による位置エネルギーを合わせ、つり合いの位置の値を差し引いた有効位置エネルギーである。

したがって、両者は一般に同じ量ではない。

演習 6 の解答・解説

演習 6(1) 最初の位置は $x_0 = 0$、初速度は $v_0 = 0$ である。

したがって、

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$= 0$$

となる。

また、

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2} = 0$$

である。

物体はつり合いの位置にあり、復元力も $F = -kx = 0$ である。そのため動き始めず、静止し続ける。

振幅 $A = 0$ は、往復運動をしていない特別な場合である。

演習 6(2) 右端 $x = +A$ は折り返し点なので、

$$v = 0$$

である。

しかし、加速度は、

$$a = -\frac{k}{m}x$$

より、

$$a = -\frac{kA}{m}$$

となる。

$A > 0$、$k > 0$、$m > 0$ なので、この加速度は負であり、左向きである。

折り返し点で速さが一瞬 0 になっても、復元力が働いているため加速度は 0 ではない。

演習 6(3) 中央では $x = 0$ なので、

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

である。

全エネルギーは $E = \frac{1}{2}kA^2$ と保存されているので、運動エネルギーは、

$$K = E = \frac{1}{2}kA^2$$

となる。

一方、加速度は、

$$a = -\frac{k}{m}x = 0$$

である。

したがって、中央では弾性エネルギーが 0、運動エネルギーが最大の $\frac{1}{2}kA^2$、加速度が 0 となる。

加速度が 0 であっても、速度は 0 ではない。$A > 0$ なので、この瞬間の速さは最大値 $A\sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ である。

演習 6(4) 符号付き速度までは必ずしも一意に決まらない。

エネルギー保存の式は、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

であり、速度が二乗されている。

そのため、位置と全エネルギーが分かれば速さは求められるが、同じ位置を右向きに進む場合と左向きに進む場合の区別はできない。

速度の符号を決めるには、進行方向や運動の経過などの情報が別に必要である。