第 109 講 電気振動

この講でできるようになること

- コンデンサーとコイルの間でエネルギーが移り変わる仕組みを説明できる。
- 極板の電荷と電流の正方向を定め、電気振動の各時刻の状態を判断できる。
- 電気振動の周期・最大電流・エネルギーを求められる。
- 電荷・電流のグラフとエネルギーのグラフを対応させ、周期の違いを説明できる。
- コイルの自己インダクタンス、コンデンサーの電気容量、初期電圧を変えたときの違いを、固定条件を明示して比較できる。

1. 電池を外しても電流が流れるのはなぜか

コンデンサーに電荷を蓄え、電池を取り外してからコイルとつなぐことを考える。

コンデンサーには電場のエネルギーが蓄えられている。一方、コイルに電流が流れると、その周囲に磁場が生じ、磁場のエネルギーが蓄えられる。

この 2 種類のエネルギーが互いに移り変わることで、電池が接続されていなくても電流が向きを変えながら流れる。

この現象を**電気振動**という。

理想的な LC 回路

コンデンサーとコイルをつないだ回路を LC 回路という。

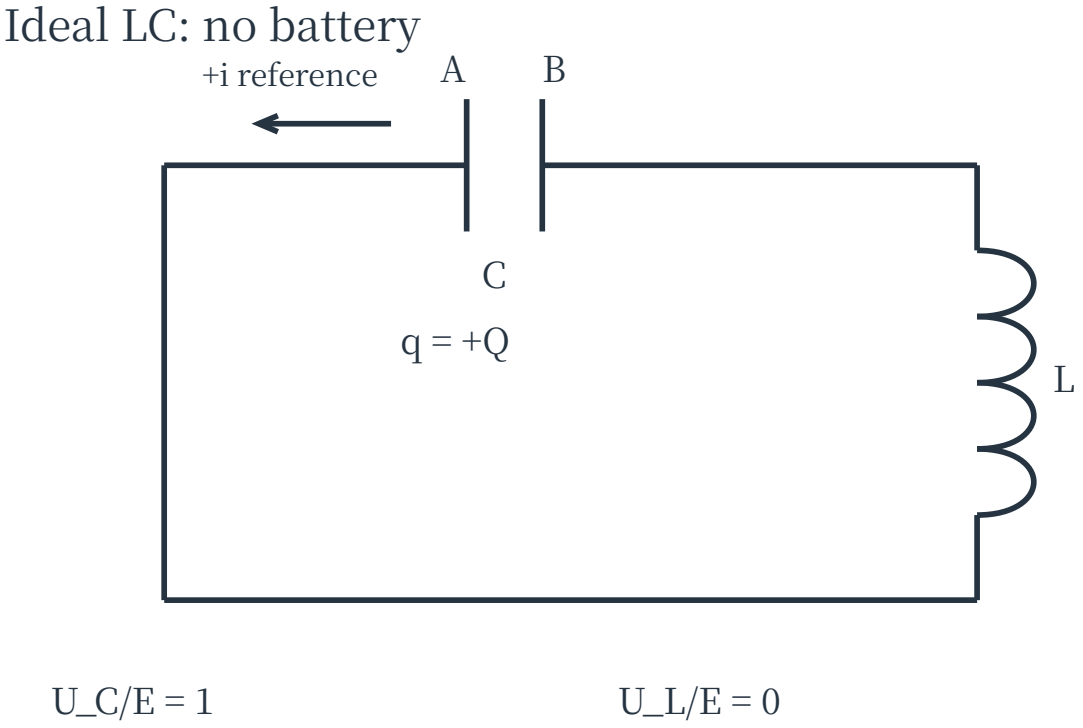
- C：コンデンサーの電気容量。単位は F（ファラド）
- L：コイルの自己インダクタンス。単位は H（ヘンリー）

本講では次の条件を満たす理想的な LC 閉回路を扱う。

1. 電池でコンデンサーを充電した後、電池を切り離す。
2. コンデンサーの電気容量 C とコイルの自己インダクタンス L は一定である。
3. 導線やコイルの抵抗による熱の発生、外部への電磁波の放射などによるエネルギー損失を無視する。
4. 電池を切り離した後、回路へ外部からエネルギーを供給しない。

したがって、振動中のコンデンサーとコイルのエネルギーの総和は一定となる。

©ミライコーチング



電荷と電流の符号を決める

図のコンデンサーの極板を A、B とする。

極板 A の符号付き電荷を q とし、極板 A から外部導線へ慣用電流が流れ出す向きを電流 i の正方向と定める。

慣用電流とは、正の電荷が移動すると考えたときの電流の向きである。

電気振動を考え始める時刻を $t = 0$ とし、初期状態を次のように定める。

$$q(0) = Q > 0, \qquad i(0) = 0$$

Q は極板 A に蓄えられた初期の正電荷量であり、電荷の振動の最大の大きさでもある。

初期には A が正、B が負に帯電している。また、振動中は A と B の電荷が互いに逆符号となるため、B の符号付き電荷は $-q$ である。

図の電流の矢印は、あくまでも**正方向を定める基準**である。初期の実際の電流は 0 A であり、矢印の向きへすでに電流が流れていることを意味しない。

電荷が減る向きと電流の正方向

極板 A から正の向きへ電流が流れ出すと、A の符号付き電荷 q は減少する。

逆に、正方向とは反対向きに電流が流れると、A の q は増加する。

つまり、この符号の決め方では、q **が減少すると** $i > 0$**、**q **が増加すると** $i < 0$ となる。電荷の変化と電流を無条件に同じ符号にしてはならない。

なお、コンデンサーの極板の間を電子が直接通り抜けるわけではない。電流は極板につながる外部導線を流れ、極板に蓄えられる電荷が変化する。

©ミライコーチング

2. 電気振動の 4 つの状態

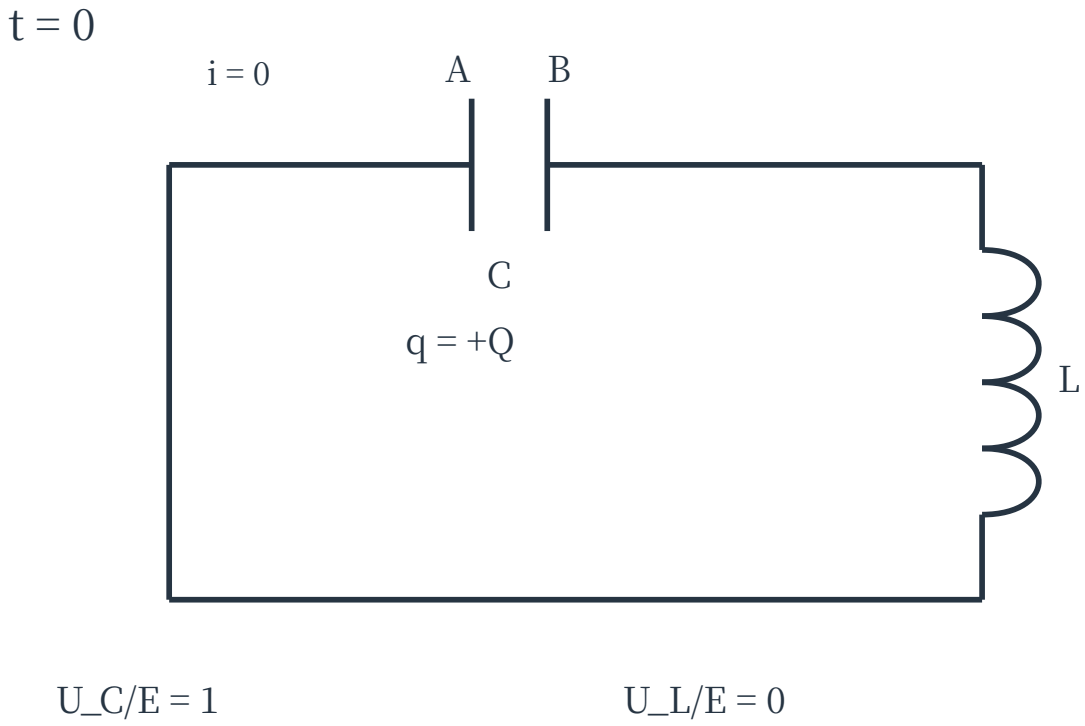
初めに正に帯電した極板 A から電流が流れ出すと、コンデンサーの電場のエネルギーが減少し、コイルの磁場のエネルギーが増加する。

電荷がなくなっても、コイルの自己誘導の働きによって電流はすぐには止まらない。そのため、コンデンサーは初めとは逆向きに帯電する。

こうして電流と電荷の向きが周期的に変化する。

振動が初期状態へ戻るまでの時間を周期 T とする。次の 4 つの状態を順番に見ていこう。

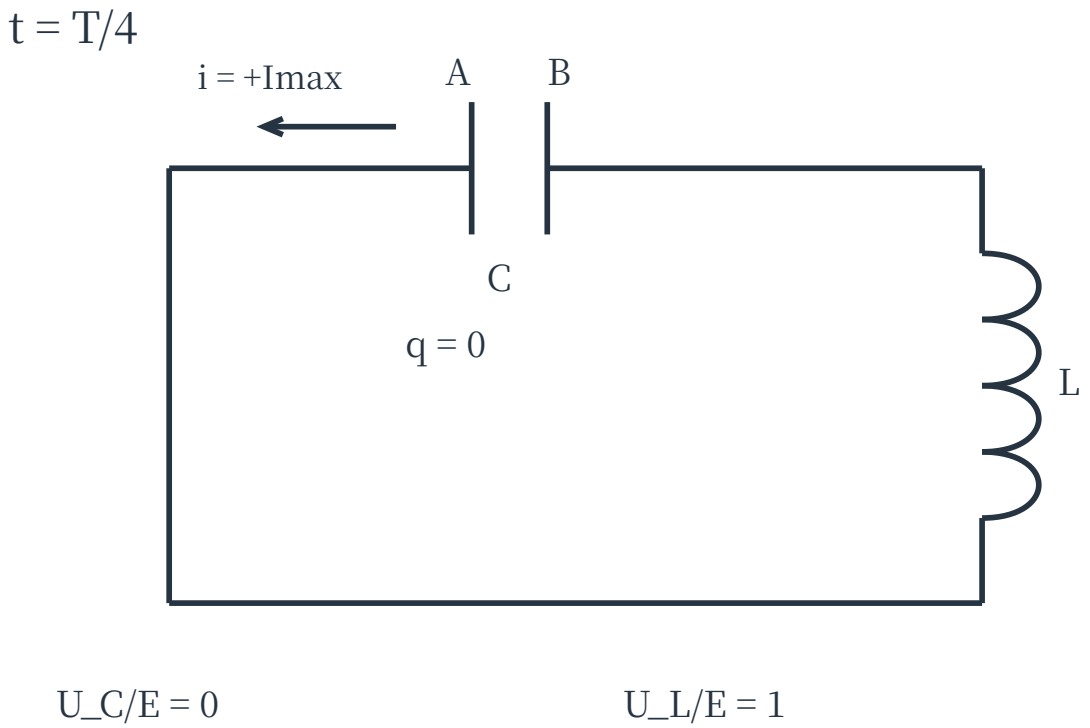
① 初期状態：$t = 0$



- 極板 A の電荷は $q = +Q$、B の電荷は $-Q$ である。
- 電流は $i = 0$ である。
- エネルギーはすべてコンデンサーの電場に蓄えられている。

電流がゼロだからといって、回路にエネルギーがないわけではない。初期には極板間の電場が最も強く、コンデンサーのエネルギーが最大となっている。

② 4 分の 1 周期後：$t = \frac{T}{4}$



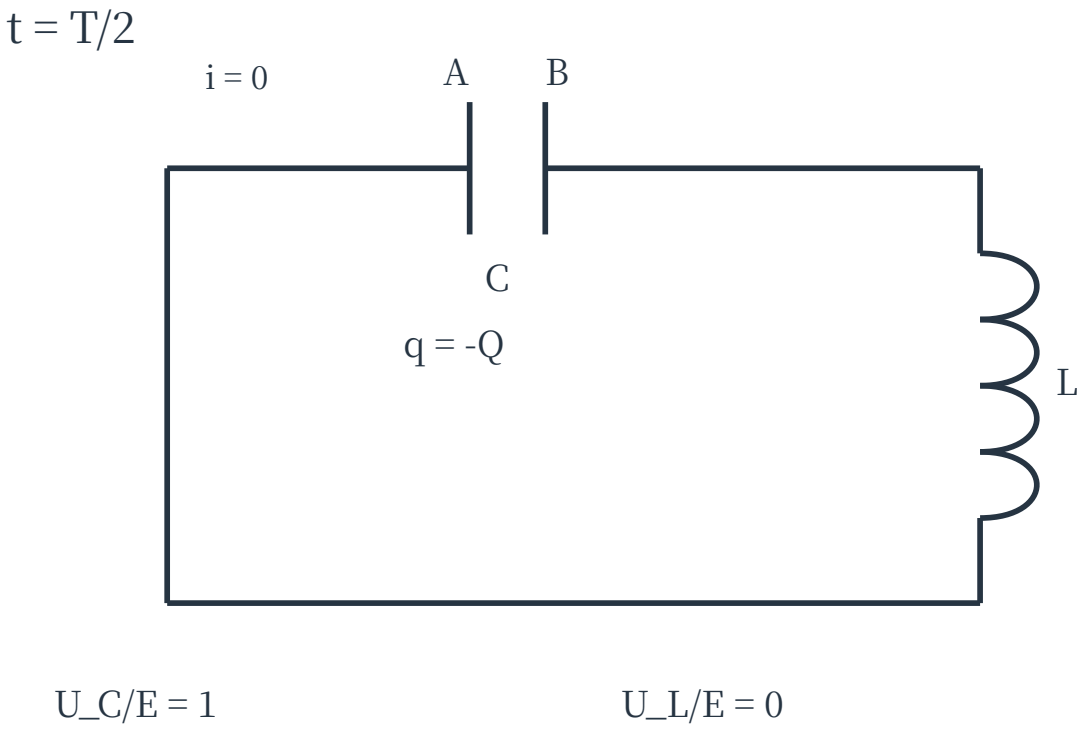
- 極板 A、B の正味の電荷はともにゼロとなり、$q = 0$ である。
- 電流は正方向に最大となり、$i = +I_{\max}$ である。
- エネルギーはすべてコイルの磁場に蓄えられている。

$I_{\max} > 0$ は電流の大きさの最大値である。

コンデンサーの電荷がゼロになる瞬間は、電流が止まる瞬間ではない。むしろ理想 LC 回路では、そのとき電流の大きさが最大となる。

コイルは電流の変化を妨げる向きの誘導起電力を生じさせるため、電流が流れ続け、さらにコンデンサーを逆向きに帯電させる。

③ 半周期後：$t = \frac{T}{2}$

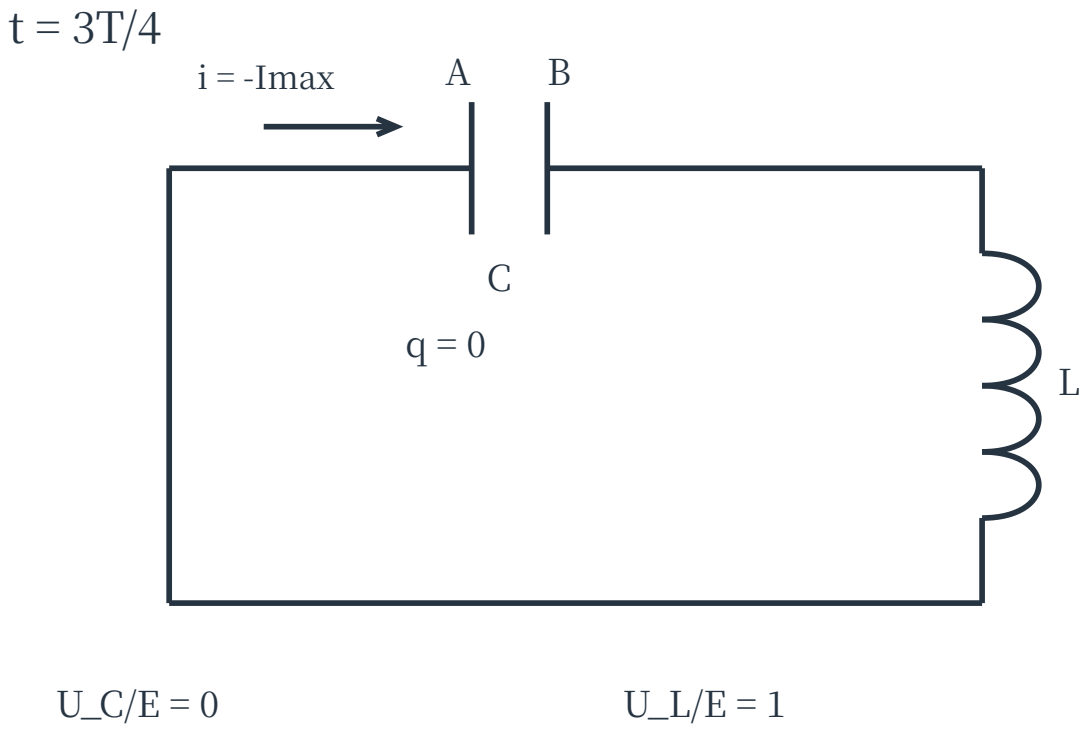


- 極板 A の電荷は $q = -Q$、B の電荷は $+Q$ である。
- 電流は再び $i = 0$ となる。
- エネルギーはすべてコンデンサーの電場に蓄えられている。

初期と比較すると極板の正負が逆転している。

ただし、コンデンサーに蓄えられるエネルギーは電荷の符号ではなく、その大きさの 2 乗によって決まる。そのため、初期と同じ大きさのエネルギーを持つ。

④ 4 分の 3 周期後：$t = 3\frac{T}{4}$



- 極板 A、B の正味の電荷はともにゼロとなり、$q = 0$ である。
- 電流は負方向に最大の大きさとなり、$i = -I_{\max}$ である。
- エネルギーはすべてコイルの磁場に蓄えられている。

今度は電流が正方向とは反対向きに流れる。図では左側の外部導線から極板 A へ流入する向きである。

その後、極板 A は再び正に帯電し、$t = T$ で初期状態に戻る。

4 状態の比較

時刻	極板 A の電荷 q	電流 i	コンデンサーのエネルギー	コイルのエネルギー
0	$+Q$	0	全体	0
$\frac{T}{4}$	0	$+I_{\max}$	0	全体
$\frac{T}{2}$	$-Q$	0	全体	0
$3\frac{T}{4}$	0	$-I_{\max}$	0	全体
T	$+Q$	0	全体	0

ここで「全体」とは、理想 LC 回路が持つ一定の全エネルギーを意味する。

$t = \frac{T}{4}$ と $t = 3\frac{T}{4}$ はどちらも $q = 0$ であるが、電流の向きは反対である。また、$t = 0$ と $t = \frac{T}{2}$ はどちらも $i = 0$ であるが、極板の電荷の符号は反対である。

したがって、**電荷または電流の一方の値だけで、振動中の状態を必ず一意に決められるとは限らない**。

3. 電荷と電流を式・グラフで表す

電気振動の周期

単振動では、振動の速さを表す量として角振動数 ω を用いた。

理想 LC 回路での角振動数と周期は、次の式で表される。

LC 回路の角振動数と周期

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

- ω：角振動数。単位は rad/s
- T：電気振動の周期。単位は s
- L：自己インダクタンス。単位は H
- C：電気容量。単位は F

また、1 周期で位相が 2π rad 進むため、$\omega = 2\frac{\pi}{T}$ である。

周期 T は、電流や電荷の振動が初期と同じ符号・同じ変化の状態へ戻る時間である。

ここで $\sqrt{LC}$ は時間の単位を持つ。L と C の値を代入するときは、それぞれ H と F にそろえる。

電荷の時間変化

初期状態が $q(0) = Q > 0$、$i(0) = 0$ であるとき、極板 A の符号付き電荷は次のように変化する。

$$q(t) = Q\cos(\omega t)$$

余弦（cos）の値は、$t = 0$ で 1、$t = \frac{T}{4}$ で 0、$t = \frac{T}{2}$ で -1、$t = T$ で再び 1 となる。

そのため、前節の電荷の変化と一致する。

電流の時間変化

電流は、極板 A の電荷が単位時間あたりにどれだけ変化するかと関係する。

本講で定めた正方向は「A から外部導線へ流れ出す向き」であるため、A の電荷が減少する速さが正の電流に対応する。

そのため、電流は次の式で表される。

$$i(t) = \omega Q\sin(\omega t)$$

最大電流の大きさを $I_{\max}$ とすると、

$$I_{\max} = \omega Q = \frac{Q}{\sqrt{LC}}$$

である。したがって、

$$i(t) = I_{\max}\sin(\omega t)$$

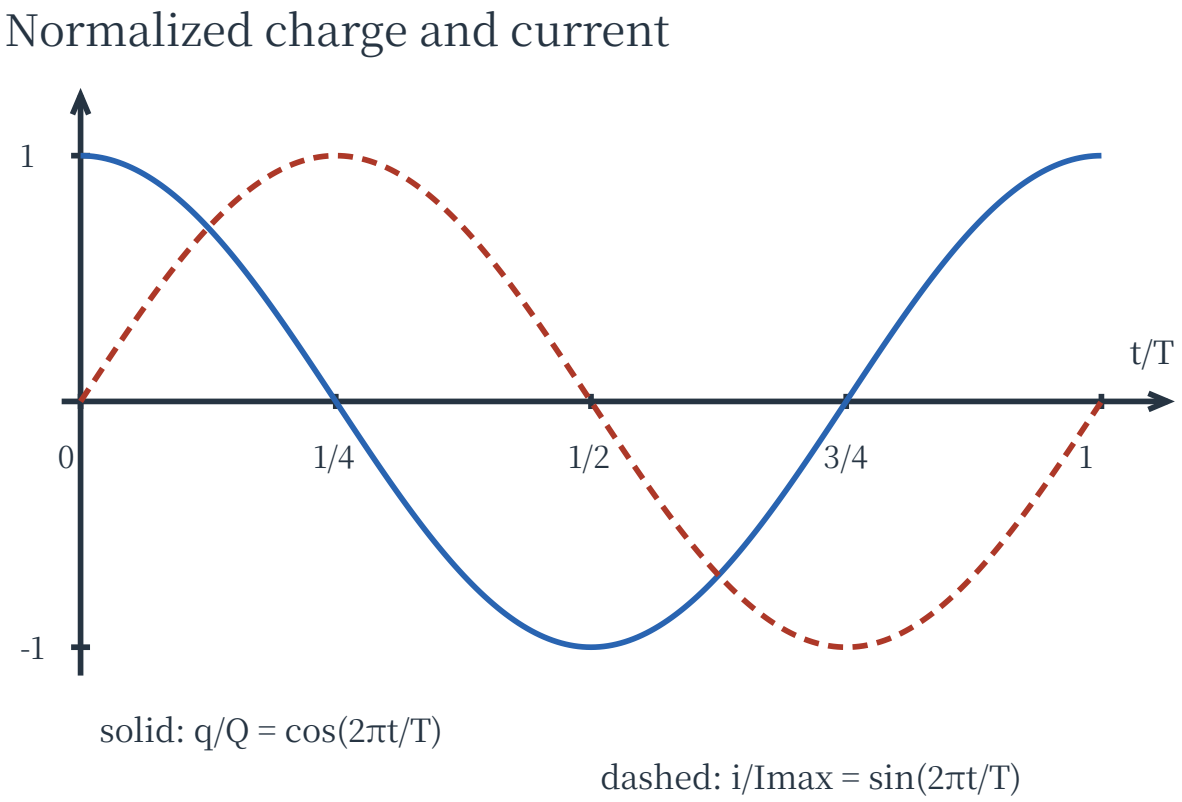
と書ける。

この符号関係は、先に決めた電荷と電流の正方向に基づく。極板 A の電荷が減る区間では電流が正、増える区間では電流が負となる。

©ミライコーチング

電荷の時間変化率を微分記号で表せば、この定義においては $i = -d\frac{q}{d}t$ となる。ただし、ここでは微分方程式を解く必要はない。電荷の増減と電流の符号の関係を理解することが重要である。

位相グラフで見る



このグラフでは、横軸に $\frac{t}{T}$、縦軸に $\frac{q}{Q}$ と $\frac{i}{I_{\max}}$ をとっている。

電荷と電流は単位が異なるので、そのまま同じ縦軸で比べることはできない。そこで、それぞれを最大の大きさで割り、-1 から $+1$ の範囲の値にそろえている。

- 実線は $\frac{q}{Q} = \cos(\omega t)$ を表す。
- 破線は $\frac{i}{I_{\max}} = \sin(\omega t)$ を表す。

実線が右下がりの区間では q が減少しており、電流は正である。反対に、実線が右上がりの区間では電流は負である。

さらに、電荷が極大・極小となる瞬間には電流がゼロとなり、電荷がゼロとなる瞬間には電流の大きさが最大となる。

電流の符号をグラフから判断する

q–t グラフを読むときは、q の値が正か負かだけで電流の向きを決めない。

見るべきものは **時間とともに q が増加しているか、減少しているか** である。同じ q の値でも、増加中と減少中では電流の符号が逆となる。

---

4. コンデンサーとコイルのエネルギー

電気振動では、電荷と電流が変化するのに伴い、電場と磁場のエネルギーが交換される。

コンデンサーのエネルギー

コンデンサーに蓄えられる電場のエネルギーを U_C とすると、

$$U_C = \frac{q^2}{2C}$$

である。

この式では電荷 q が 2 乗されているため、q が正でも負でも U_C はゼロ以上となる。

つまり、極板の正負が逆転しても、電荷の大きさが等しければ蓄えられるエネルギーは等しい。

コイルのエネルギー

コイルに蓄えられる磁場のエネルギーを U_L とすると、

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2$$

である。

こちらも電流 i の 2 乗で決まるため、電流が正方向でも負方向でも、同じ大きさの電流なら磁場のエネルギーは等しい。

エネルギーの保存

初期には電流がゼロであり、極板 A の電荷は Q である。

したがって、初期の全エネルギー E は、

$$E = \frac{Q^2}{2C}$$

となる。

振動中にエネルギー損失がない理想 LC 回路では、全エネルギーは一定である。

電気振動のエネルギー保存

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{Q^2}{2C} = E$$

左辺の第 1 項はコンデンサーの電場のエネルギー、第 2 項はコイルの磁場のエネルギーである。

一方が減少すると、同じ分だけ他方が増加する。

電荷がゼロとなった瞬間は $U_C = 0$ なので、全エネルギーがコイルにある。

このとき電流の大きさは最大値 $I_{\max}$ だから、

$$E = \frac{1}{2}LI_{\max}^2$$

が成立する。

初期のコンデンサーの両端の電圧を、極板 A の電位から極板 B の電位を引いた正の値 V_0 とすると、$Q = CV_0$ である。

これらを組み合わせると、

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}LI_{\max}^2$$

$$I_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{LC}}$$

$$= V_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

となる。

したがって、最初の電圧 V_0 がわかっている場合も、最大電流を求められる。

エネルギーの時間変化

電荷と電流の式をエネルギーの式に代入すると、

$$U_C = E\cos^2(\omega t)$$

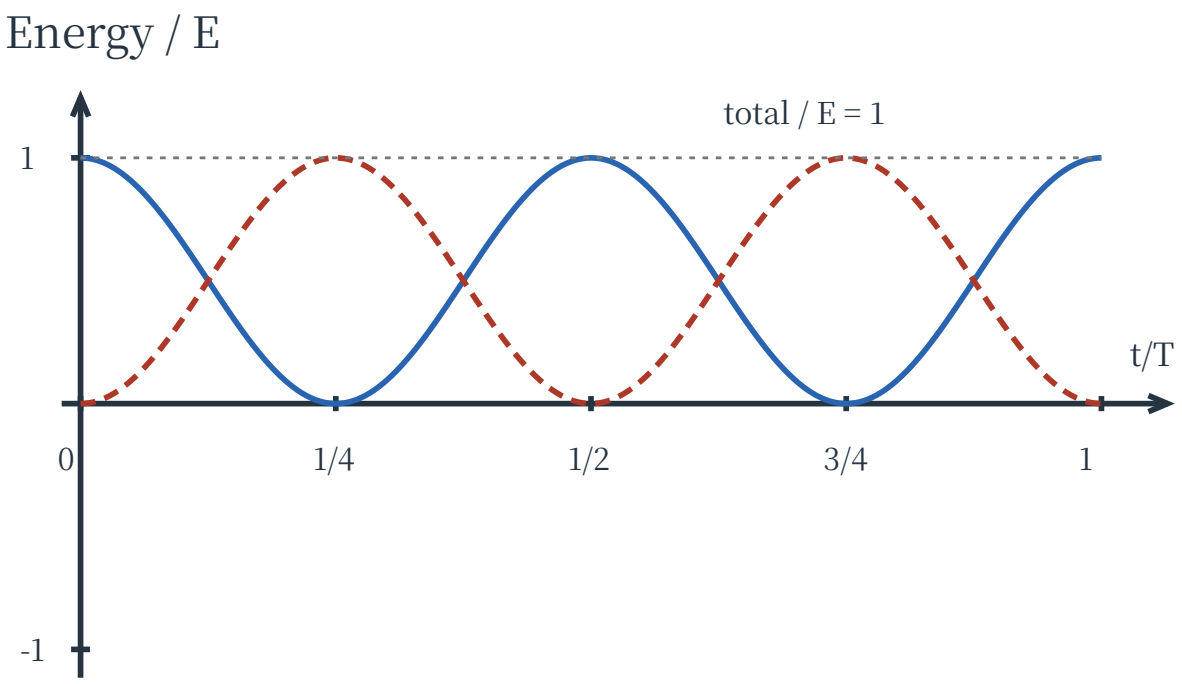
$$U_L = E\sin^2(\omega t)$$

となる。

この 2 つを足せば、

$$U_C + U_L = E$$

であり、どの瞬間も全エネルギーは変わらない。



solid: U_C/E = cos²(2πt/T)

dashed: U_L/E = sin²(2πt/T)

このグラフでは、電場・磁場のエネルギーをそれぞれ全エネルギー E で割って表示している。

- 実線の $\frac{U_C}{E}$ は、コンデンサーのエネルギーの割合を表す。
- 破線の $\frac{U_L}{E}$ は、コイルのエネルギーの割合を表す。

・点線の 1 は、全エネルギーが一定であることを表す。
同じ時刻の実線と破線の値を足すと、必ず 1 となる。

例えば、コンデンサーのエネルギーが全体の $\frac{1}{4}$ なら、コイルには残りの $\frac{3}{4}$ が蓄えられている。

電荷とエネルギーでは周期が異なる

$t=0$ と $t=\frac{T}{2}$ を比べると、極板 A の電荷は $+Q$ と $-Q$ であり、同じ状態ではない。

ところが、コンデンサーのエネルギーはいずれも E となる。

同様に、$t=\frac{T}{4}$ と $t=3\frac{T}{4}$ では電流が $+I_{\max}$ と $-I_{\max}$ で反対向きであるが、コイルのエネルギーはいずれも E となる。

したがって、電荷や電流の符号まで含めて同じ状態に戻る周期は T であるのに対し、各エネルギーが同じ変化を繰り返す周期は $\frac{T}{2}$ である。

比較する量	繰り返しの周期
符号付き電荷 q	T
符号付き電流 i	T
コンデンサーのエネルギー U_C	$\frac{T}{2}$
コイルのエネルギー U_L	$\frac{T}{2}$

電流ゼロとエネルギーゼロは別

電流がゼロならコイルの磁場のエネルギー U_L はゼロである。しかし、その瞬間にはコンデンサーの電場のエネルギー U_C が最大になっている場合がある。

一方、コンデンサーの電荷がゼロなら $U_C=0$ であるが、コイルの磁場のエネルギーは最大となる。

回路全体のエネルギーと、一方の素子に蓄えられるエネルギーを区別することが重要である。

5. 電気振動の計算と判断

例題 1

自己インダクタンス $L=0.20\,\mathrm{H}$ のコイルと、電気容量 $C=5.0\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーからなる理想 LC 閉回路を考える。

コンデンサーを電圧 $V_0=10\,\mathrm{V}$ で充電した後、電池を切り離す。時刻 $t=0$ に極板 A の電荷が正で最大、電流がゼロとなるように時刻を定める。電流は極板 A から外部導線へ流れ出す向きを正とする。

例題 1(1) 初期電荷 Q を求めよ。

例題 1(2) 角振動数 ω と周期 T を求めよ。

例題 1(3) 最大電流の大きさ $I_{\max}$ を求めよ。

例題 1(4) 回路全体のエネルギー E を求めよ。

例題 1(5) $t=\frac{T}{4}$ における極板 A の電荷 q と電流 i を求め、電流の向きを答えよ。

解答・解説　例題 1(1) 初期電荷は $Q=CV_0$ である。

$5.0\,\mu\mathrm{F} = 5.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$ より、

$$\begin{aligned} Q &= (5.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F})(10\,\mathrm{V}) \\ &= 5.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} \\ &= 50\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

よって、$Q = 50\,\mu\mathrm{C}$ である。

例題 1(2) まず $\sqrt{LC}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \sqrt{LC} &= \sqrt{(0.20\,\mathrm{H})(5.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F})} \\ &= 1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}} \\ &= 1.0 \times 10^{3}\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

周期は、

$$\begin{aligned} T &= 2\pi(1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}) \\ &= 2.0\pi \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \\ &\approx 6.28 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

である。したがって、T は約 $6.28 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$ となる。

例題 1(3) 最大電流は $I_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{LC}}$ から求める。

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{50 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}{1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}} \\ &= 5.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{A} \\ &= 0.050\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

よって、最大電流の大きさは $0.050\,\mathrm{A}$ である。

例題 1(4) 初期にはエネルギーがすべてコンデンサーに蓄えられているため、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}CV_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(5.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F})(10\,\mathrm{V})^2 \\ &= 2.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。このエネルギーは、理想 LC 回路の振動中ずっと一定である。

例題 1(5) $t=\frac{T}{4}$ では、$\omega t=\frac{\pi}{2}$ である。

$$q=Q\cos\frac{\pi}{2}=0\,\mathrm{C}$$

また、

$$\begin{aligned} i&=I_{\max}\sin\frac{\pi}{2}\\ &=+0.050\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

である。

したがって、電流は極板 A から外部導線へ流れ出す正方向に流れる。この瞬間には、全エネルギーがコイルの磁場に蓄えられている。

例題 2

電荷の最大の大きさが Q、電流の最大の大きさが $I_{\max}$、全エネルギーが E の理想 LC 回路を考える。

初期状態は $q=+Q$、$i=0$ とし、極板 A から外部導線へ流れ出す向きを電流の正方向とする。

ある瞬間、極板 A の電荷が $q=+\frac{Q}{2}$ であり、その電荷が減少している。

例題 2(1) コンデンサーのエネルギー U_C は全体の何倍か。

例題 2(2) コイルのエネルギー U_L は全体の何倍か。

例題 2(3) この瞬間の電流 i を $I_{\max}$ を用いて表せ。

例題 2(4) 同じ $q=+\frac{Q}{2}$ でも、極板 A の電荷が増加している瞬間なら、電流とエネルギーはどうなるか。

解答・解説

例題 2(1) コンデンサーのエネルギーは $\frac{q^2}{2C}$、全エネルギーは $\frac{Q^2}{2C}$ である。

したがって、

$$\begin{aligned}\frac{U_C}{E}&=\frac{q^2}{Q^2}\\ &=\frac{\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{Q^2}\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

より、$U_C=\frac{E}{4}$ である。

例題 2(2) エネルギー保存より、

$$\begin{aligned} U_L &= E - U_C \\ &= E - \frac{1}{4}E \\ &= \frac{3}{4}E \end{aligned}$$

である。

例題 2(3) コイルのエネルギーについて、

$$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{3}{4}E$$

であり、最大電流のときは $E = L\frac{I_{\max}^2}{2}$ である。

この 2 つを比較すると、

$$i^2 = \frac{3}{4}I_{\max}^2$$

$$|\, i \,| = \frac{\sqrt{3}}{2}I_{\max}$$

となる。

問題では極板 A の電荷 q が減少している。正方向に電流が流れ出しているため $i > 0$ である。

したがって、

$$i = +\frac{\sqrt{3}}{2}I_{\max}$$

である。

例題 2(4) 極板 A の電荷が増加しているなら、電流は負方向である。

電流の大きさは同じなので、

$$i = -\frac{\sqrt{3}}{2}I_{\max}$$

となる。

一方、電場と磁場のエネルギーは電荷と電流の 2 乗で決まるため、符号が変わっても、

$$U_C = \frac{1}{4}E, \qquad U_L = \frac{3}{4}E$$

のままである。

同じ電荷の値でも、増加中と減少中では電流の向きが異なる。

©ミライコーチング

例題 3

初期電圧 V_0 で充電したコンデンサーとコイルからなる理想 LC 回路 A がある。

別に、回路 A と電気容量 C および初期電圧 V_0 が等しく、コイルの自己インダクタンスだけを 4 倍にした理想 LC 回路 B を用意する。

どちらも充電後に電池を切り離し、初期電流ゼロから振動を始める。途中で素子を交換する操作ではなく、別々に用意した 2 つの回路の比較である。

例題 3(1) 回路 B の周期は回路 A の何倍か。

例題 3(2) 回路 B の最大電流の大きさは回路 A の何倍か。

例題 3(3) 回路 B の全エネルギーは回路 A の何倍か。

解答・解説

例題 3(1) 周期は $T = 2\pi\sqrt{LC}$ である。

電気容量 C を固定して L だけ 4 倍にすると、

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{2\pi\sqrt{4LC}}{2\pi\sqrt{LC}} = 2$$

となる。したがって周期は 2 倍である。

例題 3(2) 最大電流は、

$$I_{\max} = V_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

である。

初期電圧 V_0 と電気容量 C が等しいため、

$$\frac{I_{\max,B}}{I_{\max,A}} = \sqrt{\frac{L}{4L}} = \frac{1}{2}$$

となる。したがって最大電流は $\frac{1}{2}$ 倍である。

例題 3(3) 初期の全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}CV_0^2$$

である。

C と V_0 が等しいので、全エネルギーも等しい。したがって 1 倍である。

コイルの自己インダクタンスを変えると周期と最大電流は変わるが、この比較では初期の全エネルギーは変わらない。

6. 条件を変えたときの電気振動

電気振動の周期や最大電流は、L、C、初期電圧 V_0 に依存する。

ただし、比較では何を固定して何を変更したのかを明確にする必要がある。

ここでも、**それぞれ別の回路を初期条件から用意して比較する**ものとする。振動途中で素子を交換してエネルギーが自動的に保存される、と考えるものではない。

初期電圧 V_0 を固定して比較するとき、主な関係式は次のようになる。

$$Q = CV_0$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$I_{\max} = V_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$E = \frac{1}{2}CV_0^2$$

コイルの自己インダクタンスを変える

C と V_0 を固定して L を 4 倍にすると、周期は 2 倍、最大電流は $\frac{1}{2}$ 倍になる。

一方、全エネルギーは変わらない。

コンデンサーの電気容量を変える

L と V_0 を固定して C を 4 倍にすると、

- 初期電荷 Q は 4 倍になる。
- 周期 T は 2 倍になる。
- 最大電流 $I_{\max}$ は 2 倍になる。
- 全エネルギー E は 4 倍になる。

これは**初期電圧が等しい**場合の比較である。

初期電荷 Q を固定する場合は $V_0 = \frac{Q}{C}$ となるため、電気容量を 4 倍にすると初期電圧は $\frac{1}{4}$ 倍になる。この場合、全エネルギー $E = \frac{Q^2}{2C}$ は $\frac{1}{4}$ 倍である。

「C を 4 倍にする」という条件だけでは、初期電圧や初期電荷をどう設定するかが決まらず、全エネルギーの変化も一意には決まらない。

初期電圧を変える

L と C を固定して V_0 を 2 倍にすると、

- 初期電荷 Q は 2 倍になる。
- 最大電流 $I_{\max}$ は 2 倍になる。
- 全エネルギー E は 4 倍になる。
- 周期 T は変わらない。

振動の周期を決めるのは L と C であり、初期電圧は振動の大きさを決める。

比較で固定する量

L や C を変えたときは、周期の式だけでなく、最大電流とエネルギーを求める式にも戻って判断する。

特に、C を変える比較では、初期電圧 V_0 を固定するのか、初期電荷 Q を固定するのかを必ず区別する。

---

7. 理想的な振動と現実の振動

ここまで扱った理想 LC 回路では、抵抗や電磁波の放射によるエネルギー損失がなく、回路全体のエネルギーが一定である。そのため、振動は同じ大きさのまま繰り返される。

実際の回路には導線やコイルの抵抗があり、電流が流れると熱が発生する。外部へ電磁波としてエネルギーが出ていく場合もある。

このようなエネルギー損失があると、電荷や電流の振幅は時間とともに小さくなる。これを減衰という。

ただし、理想 LC 回路で考える電気振動のエネルギー交換と、振動前に電池でコンデンサーを充電する過程は別である。充電時に電池がした仕事や生じた熱を、そのまま電池を切り離した後の理想的な振動のエネルギー収支に加えてはならない。

本講では、現実に振幅が減少する理由を定性的に理解するところまでを扱う。

演習問題

以下の演習では、特に断りがない限り、電池を充電後に切り離した理想 LC 閉回路を考える。

極板 A の符号付き電荷を q とし、A から外部導線へ慣用電流が流れ出す向きを電流 i の正方向とする。初期状態は $q=+Q$、$i=0$ とし、$Q>0$、$I_{\max}>0$ とする。

演習 1

電気容量 C のコンデンサーと自己インダクタンス L のコイルからなる理想 LC 回路がある。振動の周期を T、全エネルギーを E とする。

演習 1(1) $t=\frac{T}{4}$ における極板 A の電荷 q、電流 i、コンデンサーのエネルギー U_C、コイルのエネルギー U_L を、それぞれ Q、$I_{\max}$、E を用いて表せ。

演習 1(2) $t=\frac{T}{2}$ における q と i を求め、極板 A、B の帯電状態を答えよ。

演習 1(3) $t=3\frac{T}{4}$ における q と i を求め、電流がどちらの向きに流れているかを説明せよ。

演習 1(4) $t=T$ における回路の状態を答えよ。また、$t=\frac{T}{2}$ の状態と比較し、両者が同じ状態ではない理由を説明せよ。

解答・解説は末尾の「演習問題の解答・解説」の演習 1 を参照せよ。

©ミライコーチング

演習 2

ある理想 LC 回路の電荷の最大の大きさを Q、最大電流の大きさを $I_{\max}$、全エネルギーを E とする。

ある瞬間、極板 A の符号付き電荷が $q = -\frac{Q}{2}$ であり、時間とともに q が増加している。

演習 2(1) コンデンサーのエネルギー U_C を E を用いて表せ。

演習 2(2) コイルのエネルギー U_L を E を用いて表せ。

演習 2(3) 電流の大きさを $I_{\max}$ を用いて求め、電流 i の符号も含めて答えよ。

演習 2(4) 別の瞬間にも同じ $q = -\frac{Q}{2}$ になったが、今度は q が減少している。この瞬間の電流と各エネルギーを答え、前の状態との違いを説明せよ。

解答・解説は末尾の「演習問題の解答・解説」の演習 2 を参照せよ。

演習 3

自己インダクタンス $L = 0.50\,\mathrm{H}$ のコイルと、電気容量 $C = 8.0\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーからなる理想 LC 回路を考える。

コンデンサーを初期電圧 $V_0 = 6.0\,\mathrm{V}$ で充電した後、電池を切り離す。振動開始時には極板 A の電荷が正で最大、電流はゼロである。

演習 3(1) 初期電荷 Q を $\mu\mathrm{C}$ で求めよ。

演習 3(2) $\sqrt{LC}$ と周期 T を求めよ。周期は π を含む形でよい。

演習 3(3) 最大電流の大きさ $I_{\max}$ を A で求めよ。

演習 3(4) 回路の全エネルギー E を J で求めよ。

演習 3(5) 電荷がゼロとなる瞬間、コイルに蓄えられるエネルギーはいくらか。また、その瞬間の電流の大きさを答えよ。

解答・解説は末尾の「演習問題の解答・解説」の演習 3 を参照せよ。

©ミライコーチング

演習 4

基準となる理想 LC 回路 A を考える。自己インダクタンスは L、電気容量は C、初期電圧は V_0 であり、初期電流はゼロとする。

以下の回路 B〜E は、いずれも回路 A とは別に初期条件を設定して用意する。振動途中で素子を交換する操作は行わない。

演習 4(1) 回路 B は、回路 A と同じ C、V_0 で、L だけが 4 倍である。周期、最大電流の大きさ、全エネルギーは、それぞれ回路 A の何倍か。

演習 4(2) 回路 C は、回路 A と同じ L、V_0 で、C だけが 4 倍である。初期電荷、周期、最大電流の大きさ、全エネルギーは、それぞれ何倍か。

演習 4(3) 回路 D は、回路 A と同じ L、C で、初期電圧 V_0 だけが 2 倍である。初期電荷、周期、最大電流の大きさ、全エネルギーは、それぞれ何倍か。

演習 4(4) 回路 E は、回路 A と同じ L で、C を 4 倍にする。ただし、初期電荷 Q は回路 A と等しくなるように初期電圧を設定する。初期電圧、周期、最大電流の大きさ、全エネルギーは、それぞれ何倍か。

解答・解説は末尾の「演習問題の解答・解説」の演習 4 を参照せよ。

演習 5

ある理想 LC 回路の極板 A の電荷と電流が、次の式で表される。

$$q = Q\cos(\omega t)$$

$$i = I_{\max}\sin(\omega t)$$

ただし、$Q > 0$、$I_{\max} > 0$、$\omega = 2\frac{\pi}{T}$ である。電流の正方向は、極板 A から外部導線へ流れ出す向きとする。

演習 5(1) $t = \frac{T}{6}$ における電荷 q と電流 i を求めよ。

演習 5(2) $t = 5\frac{T}{6}$ における電荷 q と電流 i を求めよ。

演習 5(3) 上の 2 つの瞬間では電荷が同じ値となる。それでも電流の符号が異なる理由を、極板 A の電荷の増減に着目して説明せよ。

演習 5(4) 2 つの瞬間のコンデンサーのエネルギーとコイルのエネルギーを、それぞれ全エネルギー E を用いて表せ。

解答・解説は末尾の「演習問題の解答・解説」の演習 5 を参照せよ。

©ミライコーチング

演習 6

ある理想 LC 回路について、初期状態を $q = +Q$、$i = 0$ とする。電荷と電流は、

$$q = Q\cos(\omega t), \qquad i = I_{\max}\sin(\omega t)$$

に従って変化する。全エネルギーを E、周期を T とする。

演習 6(1) $t = \frac{T}{8}$ における q と i を求めよ。

演習 6(2) $t = \frac{T}{8}$ におけるコンデンサーとコイルのエネルギーを、それぞれ E を用いて表せ。

演習 6(3) $t = 5\frac{T}{8}$ における q と i を求め、$t = \frac{T}{8}$ のときと比較せよ。

演習 6(4) $t = 5\frac{T}{8}$ における各エネルギーを求めよ。また、符号付き電荷・電流の周期と、各エネルギーの周期が異なる理由を説明せよ。

解答・解説は末尾の「演習問題の解答・解説」の演習 6 を参照せよ。

演習 7

理想 LC 回路および現実の LC 回路について、次の主張を考える。

演習 7(1) 「電流がゼロなら、回路全体のエネルギーもゼロである」という主張が正しいか答え、理由を説明せよ。

演習 7(2) 「コンデンサーの電荷がゼロになると電流もゼロになり、振動が止まる」という主張が正しいか答え、理由を説明せよ。

演習 7(3) 「電池を切り離した理想 LC 閉回路では、外部からエネルギーを与えなくても電気振動が続く」という主張が正しいか答え、エネルギーの移り変わりと結びつけて説明せよ。

演習 7(4) 現実の LC 回路では、理想 LC 回路と異なり、電荷や電流の振幅が徐々に小さくなることがある。その理由を定性的に説明せよ。

演習 7(5) 「振動前にコンデンサーを充電するときに発生した熱は、電池を切り離した後の理想 LC 回路でも毎周期同じだけ発生する」という主張が正しいか答えよ。

解答・解説は末尾の「演習問題の解答・解説」の演習 7 を参照せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1) $t = \frac{T}{4}$ では、電荷はゼロ、電流は正方向に最大となる。

$$q = 0, \qquad i = +I_{\max}$$

コンデンサーのエネルギーはゼロであり、全エネルギーはコイルに蓄えられている。

$$U_C = 0, \qquad U_L = E$$

演習 1(2) $t = \frac{T}{2}$ では、極板の正負が初期と逆転している。

$$q = -Q, \qquad i = 0$$

したがって、極板 A には $-Q$、極板 B には $+Q$ の電荷が蓄えられている。

演習 1(3) $t = 3\frac{T}{4}$ では、

$$q = 0, \qquad i = -I_{\max}$$

である。

電流は負なので、定めた正方向とは反対向き、すなわち外部導線から極板 A へ流入する向きに流れている。

この瞬間、電流の大きさは最大であり、エネルギーはすべてコイルに蓄えられている。

演習 1(4) $t = T$ では、

$$q = +Q, \qquad i = 0$$

となり、極板 A が正、B が負に帯電した初期状態へ戻る。

一方、$t = \frac{T}{2}$ では $q = -Q$ であり、極板の正負が逆である。

どちらも電流はゼロで、コンデンサーのエネルギーは E であるが、極板間の電場の向きが異なる。

したがって、エネルギーが同じであることだけでは、振動の状態が同じとはいえない。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1) コンデンサーのエネルギーは、

$$U_C = \frac{q^2}{2C}$$

である。

全エネルギー $E = \frac{Q^2}{2C}$ と比較すると、

$$\begin{aligned} \frac{U_C}{E} &= \frac{q^2}{Q^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{Q}{2}\right)^2}{Q^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$U_C = \frac{1}{4}E$$

である。

電荷が負でも、エネルギーは負にならない。

演習 2(2) エネルギー保存より、

$$\begin{aligned} U_L &= E - U_C \\ &= E - \frac{1}{4}E \\ &= \frac{3}{4}E \end{aligned}$$

である。

演習 2(3) コイルのエネルギーは、

$$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{3}{4}E$$

である。

また、最大電流のときは $E = L\frac{I_{\max}^2}{2}$ だから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Li^2 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}LI_{\max}^2 \\ i^2 &= \frac{3}{4}I_{\max}^2 \end{aligned}$$

したがって、電流の大きさは、

$$| \, i \, | = \frac{\sqrt{3}}{2}I_{\max}$$

である。

ここで問題では、極板 A の符号付き電荷 q が増加している。

A から流れ出す向きを正と定めているため、q が増加するときの電流は負である。

よって、

$$i = -\frac{\sqrt{3}}{2}I_{\max}$$

となる。

演習 2(4) 同じ $q = -\frac{Q}{2}$ でも、今度は q が減少している。

そのため、電流は正方向に流れており、

$$i = +\frac{\sqrt{3}}{2}I_{\max}$$

である。

エネルギーは、

$$U_C = \frac{1}{4}E, \qquad U_L = \frac{3}{4}E$$

のままである。

両者の違いは電流の向きである。電荷の値が同じでも、その電荷が増加している状態と減少している状態の 2 通りがあり得る。

エネルギーの式は電荷と電流の 2 乗を使うため、この 2 つの状態をエネルギーの値だけで区別することはできない。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1) 初期電荷は、

$$Q = CV_0$$

である。

$$\begin{aligned} Q &= (8.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F})(6.0\,\mathrm{V}) \\ &= 4.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} \\ &= 48\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

したがって、初期電荷は $48\,\mu\mathrm{C}$ である。

演習 3(2) まず、$\sqrt{LC}$ を求める。

$$\begin{aligned} \sqrt{LC} &= \sqrt{(0.50\,\mathrm{H})(8.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F})} \\ &= \sqrt{4.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}^2} \\ &= 2.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

周期は、

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{LC} \\ &= 2\pi\bigl(2.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}\bigr) \\ &= 4.0\pi \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

である。

演習 3(3) 最大電流は、

$$I_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{LC}}$$

から求める。

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{48 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}{2.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}} \\ &= 2.4 \times 10^{-2}\,\mathrm{A} \\ &= 0.024\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

となる。

演習 3(4) 全エネルギーは初期のコンデンサーのエネルギーに等しい。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}CV_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(8.0\times10^{-6}\,\mathrm{F}\right)\left(6.0\,\mathrm{V}\right)^2 \\ &= 1.44\times10^{-4}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

演習 3(5) 電荷 q がゼロなら、コンデンサーのエネルギーは、

$$U_C = \frac{0^2}{2C} = 0\,\mathrm{J}$$

である。

理想 LC 回路では全エネルギーが一定なので、

$$U_L = E = 1.44\times10^{-4}\,\mathrm{J}$$

となる。

このとき電流の大きさは最大であり、

$$|\,i\,| = I_{\max} = 0.024\,\mathrm{A}$$

である。

ただし、電荷がゼロであるという条件だけでは、電流が正方向か負方向かは決まらない。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1) 回路 B は L だけが 4 倍であり、C と V_0 は回路 A と等しい。

周期について、

$$\frac{T_B}{T_A} = \sqrt{4} = 2$$

である。

最大電流は $V_0\sqrt{\frac{C}{L}}$ に比例するため、

$$\frac{I_{\max,B}}{I_{\max,A}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

となる。

全エネルギー $E = C\frac{V_0^2}{2}$ は C と V_0 が等しいので変わらない。

よって、周期は 2 倍、最大電流は $\frac{1}{2}$ 倍、全エネルギーは 1 倍である。

演習 4(2) 回路 C は C だけが 4 倍であり、L と V_0 は回路 A と等しい。

初期電荷は $Q = CV_0$ なので 4 倍となる。

周期は $\sqrt{C}$ に比例するので、

$$\frac{T_C}{T_A} = \sqrt{4} = 2$$

である。

最大電流は $V_0\sqrt{\frac{C}{L}}$ であり、$\sqrt{C}$ に比例するため 2 倍となる。

全エネルギーは $C\frac{V_0^2}{2}$ であり、C に比例するため 4 倍となる。

したがって、初期電荷 4 倍、周期 2 倍、最大電流 2 倍、全エネルギー 4 倍である。

演習 4(3) 回路 D では L と C が一定で、初期電圧 V_0 だけが 2 倍である。

初期電荷 $Q = CV_0$ は 2 倍となる。

周期 $T = 2\pi\sqrt{LC}$ には V_0 が含まれないため、周期は変わらない。

最大電流 $I_{\max} = V_0\sqrt{\frac{C}{L}}$ は 2 倍となる。

全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}CV_0^2$$

なので、初期電圧の 2 乗に比例し 4 倍となる。

したがって、初期電荷 2 倍、周期 1 倍、最大電流 2 倍、全エネルギー 4 倍である。

演習 4(4) 回路 E では L と初期電荷 Q が一定であり、C が 4 倍である。

初期電圧は $V_0 = \frac{Q}{C}$ なので、

$$\frac{V_{0,E}}{V_{0,A}} = \frac{1}{4}$$

となる。

周期は、

$$\frac{T_E}{T_A} = \sqrt{4} = 2$$

である。

最大電流は初期電荷を用いて、

$$I_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{LC}}$$

と表せる。

Q と L が一定なので、C を 4 倍にすると最大電流は $\frac{1}{2}$ 倍となる。

全エネルギーは、

$$E = \frac{Q^2}{2C}$$

であり、Q が一定なので C を 4 倍にすると $\frac{1}{4}$ 倍になる。

したがって、初期電圧 $\frac{1}{4}$ 倍、周期 2 倍、最大電流 $\frac{1}{2}$ 倍、全エネルギー $\frac{1}{4}$ 倍である。

演習 4(2)では初期電圧を固定したため、電気容量を 4 倍にするとエネルギーは 4 倍になった。一方、演習 4(4)では初期電荷を固定したため、エネルギーは $\frac{1}{4}$ 倍になった。

同じ電気容量の変更でも、初期条件によって結果が異なる。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1) $t = \frac{T}{6}$ のとき、

$$\omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}$$

である。

電荷は、

$$q = Q\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= +\frac{1}{2}Q$$

となる。

電流は、

$$i = I_{\max}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= +\frac{\sqrt{3}}{2}I_{\max}$$

である。

演習 5(2) $t = 5\frac{T}{6}$ のとき、

$$\omega t = \frac{5\pi}{3}$$

となる。

電荷は、

$$q = Q\cos\frac{5\pi}{3}$$

$$= +\frac{1}{2}Q$$

である。

一方、電流は、

$$i = I_{\max}\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}I_{\max}$$

となる。

演習 5(3) $t=\frac{T}{6}$ では、初期の $+Q$ から極板 A の電荷が減少している。A から外部導線へ電流が流れ出すため、電流は正である。

一方、$t=5\frac{T}{6}$ では、負に帯電した状態から q が増加して $+Q$ に近づいている。電流は A へ流入する向きなので負である。

したがって、2 つの瞬間では電荷の値が同じでも、電荷の増減が異なるため電流の符号が反対になる。

演習 5(4) どちらの瞬間も $q=+\frac{Q}{2}$ なので、

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{q^2}{2C} \\ &= \frac{Q^2}{8C} \\ &= \frac{1}{4}E \end{aligned}$$

である。

コイルのエネルギーは、

$$\begin{aligned} U_L &= E - U_C \\ &= \frac{3}{4}E \end{aligned}$$

となる。

したがって、2 つの瞬間とも、

$$U_C = \frac{1}{4}E, \qquad U_L = \frac{3}{4}E$$

である。

電流の符号は反対だが、その大きさは等しい。よって、磁場のエネルギーも等しい。

演習 6 の解答・解説

演習 6(1) $t=\frac{T}{8}$ では、

$$\omega t = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{8} = \frac{\pi}{4}$$

である。

したがって、電荷は、

$$\begin{aligned} q &= Q\cos\frac{\pi}{4} \\ &= +\frac{\sqrt{2}}{2}Q \end{aligned}$$

となる。

電流は、

$$i = I_{\max} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= +\frac{\sqrt{2}}{2} I_{\max}$$

である。

演習 6(2) コンデンサーのエネルギーは、

$$U_C = E \cos^2 \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} E$$

となる。

コイルのエネルギーも、

$$U_L = E \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} E$$

である。

したがって、$t = \frac{T}{8}$ では全エネルギーがコンデンサーとコイルに等しく分配されている。

演習 6(3) $t = 5\frac{T}{8}$ では、

$$\omega t = \frac{5\pi}{4}$$

である。

電荷は、

$$q = Q \cos \frac{5\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} Q$$

となる。

電流は、

$$i = I_{\max} \sin \frac{5\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} I_{\max}$$

である。

$t = \frac{T}{8}$ と比較すると、電荷も電流も大きさは等しく、符号が反対になっている。

演習 6(4) $t = 5\frac{T}{8}$ のエネルギーは、

$$U_C = E\cos^2\frac{5\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}E$$

および、

$$U_L = E\sin^2\frac{5\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}E$$

である。

したがって、$t = \frac{T}{8}$ と $t = 5\frac{T}{8}$ のエネルギーは等しい。

これは、電場と磁場のエネルギーがそれぞれ q^2、i^2 に比例するためである。

電荷と電流は半周期後に符号が反転するが、2 乗すると同じ値となる。そのため、エネルギーは半周期ごとに同じ状態を繰り返す。

よって、符号付き電荷と電流の周期は T、各エネルギーの周期は $\frac{T}{2}$ である。

演習 7 の解答・解説

演習 7(1) 正しくない。

電流 $i = 0$ のとき、コイルの磁場のエネルギーは、

$$U_L = \frac{1}{2}L(0)^2 = 0$$

である。

しかし、コンデンサーには電荷が蓄えられており、電場のエネルギーが最大となっている場合がある。

例えば初期状態では $q = +Q$、$i = 0$ であり、

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = E$$

となる。したがって、電流がゼロでも回路全体のエネルギーはゼロとは限らない。

演習 7(2) 正しくない。

コンデンサーの電荷がゼロとなると、

$$U_C = 0$$

であるが、エネルギーはコイルの磁場に蓄えられている。

エネルギー保存より、

$$\frac{1}{2}Li^2 = E$$

となるため、電流の大きさは最大である。

この瞬間、コイルの自己誘導の働きによって電流は流れ続け、コンデンサーを逆向きに帯電させていく。

したがって、電荷がゼロになることは、振動が止まることを意味しない。

演習 7(3) 正しい。ただし、抵抗や放射によるエネルギー損失がない理想 LC 閉回路という条件が必要である。

コンデンサーに蓄えられていた電場のエネルギーが、電流の増加に伴ってコイルの磁場のエネルギーへ変わる。

その後、コイルの磁場のエネルギーがコンデンサーの電場のエネルギーへ戻る。

この交換が繰り返され、全エネルギーは、

$$U_C + U_L = E$$

を満たし続ける。

そのため、電池を切り離しても理想的な電気振動は続く。

演習 7(4) 現実の回路では、導線やコイルに電気抵抗があり、電流が流れると熱が発生する。

また、電磁波としてエネルギーが外部へ放射される場合もある。

そのため、コンデンサーとコイルの間で交換されるエネルギーが徐々に減少し、電荷や電流の振幅が小さくなることがある。

これが減衰である。

演習 7(5) 正しくない。

電池を使ってコンデンサーを充電する過程と、電池を切り離した後の電気振動は異なる過程である。

理想 LC 回路では、振動中の抵抗による熱や放射損失を無視する。そのため、振動前の充電時に発生した熱を、電池切離し後の各周期でも繰り返し発生するものとして扱ってはならない。

電池を切り離した後は、その時点でコンデンサーとコイルに蓄えられているエネルギーを出発点として、電場と磁場のエネルギー交換を考える。