第 208 講 指数関数・対数関数の積分

学習目標

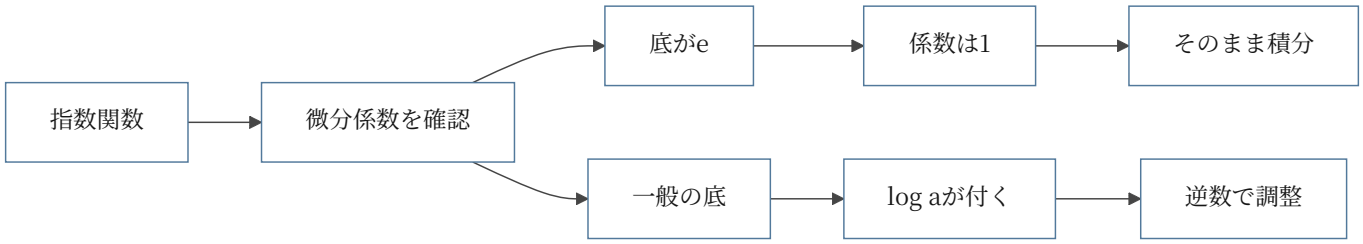
この講では、指数関数・対数関数の積分について、微分との対応から積分方法を判断できるようになることを目標とする。
- e^x と a^x の原始関数の違いを説明できる。
- 指数部分が一次式 $kx+b$ の場合に、係数 k の逆数を用いる理由を説明できる。
- $x \neq 0$ を満たす連結な開区間で $\frac{1}{x}$ の原始関数を $\log|x|+C$ と表せる。
- $x>0$ における $\log x$ の積分を部分積分で求め、微分で確認できる。

自然対数

この講で log は自然対数を表す。つまり、$\log x$ は底が e の対数である。
自然対数の底 e は $e>0$ かつ $e \neq 1$ を満たす定数であり、関数 $\log x$ は指数関数 e^x の逆関数である。この逆関係によって、指数関数と対数関数は微分・積分で密接に結び付いている。

指数関数の積分と微分係数

指数関数の積分では、積分したい関数を微分したときに何倍されるかを見ることが重要である。
e^x は微分しても同じ形になり、$\frac{d}{dx}e^x=e^x$ である。一方、a^x は $a>0$、$a \neq 1$ のとき、微分すると $\log a$ が係数として現れる。
この図は、指数が x の場合について、底が e の指数関数と一般の底 a の指数関数を比較したものである。



この図の矢印は、指数が x の場合に、微分結果を確認することで積分時の調整量を判断する流れを表している。
$a>0$、$a \neq 1$ を満たす実定数 a に対して、$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$ である。
また、k、b を実定数とし、$k \neq 0$ のとき、指数部分 $kx+b$ の微分で係数 k が現れるため、
$\int e^{kx+b}dx=\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$ となる。
一般に、$a>0$、$a \neq 1$、$k \neq 0$ を満たすとき、$\int a^{kx+b}dx=\frac{a^{kx+b}}{k\log a}+C$ である。
なお、$k=0$ の場合は指数部分が定数となるため、定数関数の積分になる。例えば、$\int e^b dx=e^b x+C$、$\int a^b dx=a^b x+C$ である。
ここでの C は、考えている連結な開区間ごとの任意の実定数である。

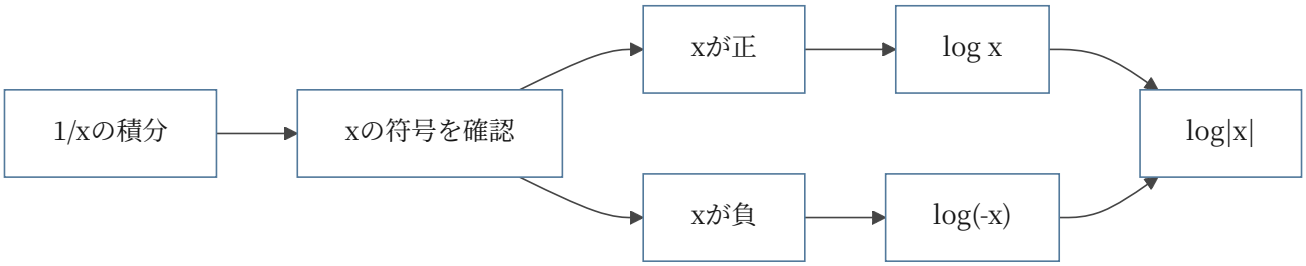
一次式を含む指数関数の判断

指数関数の積分では、指数部分の係数を見る。
$kx+b$ を微分すると k になるため、その係数を打ち消すために $\frac{1}{k}$ を掛ける。
例えば、$\int e^{2x+1}dx$ では指数部分の微分係数が 2 であるため、結果には $\frac{1}{2}$ が必要になる。

©ミライコーチング

$\frac{1}{x}$の積分と定義域

$\frac{1}{x}$ は $x=0$ で定義されないため、原始関数は定義域ごとに考える必要がある。
$x>0$ の区間では $\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}$ であり、$x<0$ の区間では $\frac{d}{dx}\log(-x)=\frac{1}{x}$ である。
そのため、$x\neq 0$ を満たす連結な開区間では、$\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$ と表すことができる。



この図の矢印は、正負それぞれの区間で得られる表現を絶対値を用いてまとめる流れを表している。
ただし、$x=0$ をまたぐ区間では 1 つの原始関数として扱えない。C はそれぞれの連結な開区間で任意の実定数である。

$\log x$の積分

$x>0$ の範囲では、$\log x$ の積分に部分積分を利用する。
$\log x$ は微分する因子として選ぶ。掛けられた 1 は積分すると x になるため、$\log x=1\times\log x$ と見て、$u=\log x$、$dv=dx$ と置く。
具体的な計算は例題で確認する。

例題

例題 1

次の不定積分 $\int e^{2x+1}dx$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

指数部分 $2x+1$ を微分すると 2 になるため、係数の逆数 $\frac{1}{2}$ を付ける。
したがって、$\int e^{2x+1}dx=\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$ である。
検算すると、$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2e^{2x+1}=e^{2x+1}$ となる。
微分すると元の被積分関数に戻るため、答えは $\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$ である。

例題 2

次の不定積分 $\int 3^x dx$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

底が 3 の指数関数であるため、一般底の公式を用いる。
$a=3$ は $a>0$、$a\neq 1$ を満たすため、$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}+C$ を利用できる。
したがって、$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\log 3}+C$ である。
検算すると、$\frac{d}{dx}\left(\frac{3^x}{\log 3}\right)=\frac{3^x \log 3}{\log 3}=3^x$ となる。
一般の底では $\log a$ の係数を忘れると微分後にずれが生じるため、微分係数を確認することが重要である。

例題 3

$x>0$ として、次の不定積分 $\int \log x dx$ を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

$x>0$ であるため、$\log x$ を扱える。
$\log x$ は微分する因子として選ぶ。掛けられた 1 は積分すると x になるため、$\log x = 1\times \log x$ と見て、部分積分で $u=\log x$、$dv=dx$ と置く。
このとき、$du=\frac{1}{x}dx$、$v=x$ である。
部分積分を用いて次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= x\log x - \int 1 dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

計算結果は $\int \log x dx = x\log x - x + C$ である。
検算すると、$\frac{d}{dx}(x\log x - x)=\log x + x\cdot\frac{1}{x}-1=\log x$ となる。
よって、$x>0$ における原始関数は $x\log x - x + C$ である。

演習

演習 1

次の不定積分 $\int (2e^x - 3e^{2x})dx$ を求めなさい。

演習 2

次の不定積分 $\int e^{-3x+2}dx$ を求めなさい。

演習 3

次の不定積分 $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$ を求めなさい。

演習 4

次の不定積分 $\int 5^{2x-1}dx$ を求めなさい。

演習 5

$x<0$ の区間で、$\frac{1}{x}$ の原始関数を求め、微分して確認しなさい。

演習 6

$x>0$ として、次の不定積分 $\int \log(2x)dx$ を求めなさい。

演習 7

$a>0$、$a\neq 1$ とする。$\int a^x dx = a^x + C$ という主張が正しいか判定しなさい。また、成立する例外について説明しなさい。

演習 8

$F'(x)=e^{2x}$、$F(0)=1$ を満たす関数 $F(x)$ を求めなさい。

演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

指数関数の和の積分では、それぞれの項を分けて考える。
e^x は微分しても係数が変化しないため、そのまま積分できる。一方、e^{2x} は微分すると $2e^{2x}$ になるため、積分では係数 2 を打ち消すために $\frac{1}{2}$ を掛ける必要がある。
次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int (2e^x - 3e^{2x})dx &= 2\int e^x dx - 3\int e^{2x}dx \\ &= 2e^x - 3\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C \\ &= 2e^x - \frac{3}{2}e^{2x} + C\end{aligned}$$

検算すると、$\frac{d}{dx}\left(2e^x - \frac{3}{2}e^{2x}\right) = 2e^x - 3e^{2x}$ となる。
係数調整によって微分時に現れる余分な係数を消していることが確認できる。

演習 2 の解答・解説

指数部分 $-3x+2$ を微分すると -3 になる。
そのため、積分では微分で生じる -3 を打ち消すために $-\frac{1}{3}$ を掛ける。
したがって、$\int e^{-3x+2}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x+2} + C$ である。
検算すると、$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x+2}\right) = -\frac{1}{3}\cdot(-3)e^{-3x+2} = e^{-3x+2}$ となる。
負の係数の場合でも、微分係数の逆数を掛けるという判断は変わらない。

©ミライコーチング

演習 3 の解答・解説

底が $\frac{1}{2}$ であるため、一般底の公式を用いる。
$a=\frac{1}{2}$ は $a>0$、$a\neq 1$ を満たす。ここで、$0<a<1$ であるため、$\log a<0$ となる点に注意する。
一般底の積分公式より、$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$ である。
計算すると次の結果を得る。

$$\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log \frac{1}{2}}+C$$

この結果は、$\log \frac{1}{2}=-\log 2$ を用いると、次のようにも表せる。

$$-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log 2}+C$$

分母が負になるため全体に負号が付くが、これは $\log \frac{1}{2}$ と $-\log 2$ が同じ値を表すことによる同値な表現である。
検算は次のように行う。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log \frac{1}{2}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x \log \frac{1}{2}}{\log \frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$0<a<1$ の場合は $\log a$ が負になるが、公式の形は変化せず、微分係数を打ち消すための調整として働いている。

演習 4 の解答・解説

指数部分が一次式で、底も一般の 5 であるため、一般底かつ一次式指数の公式を用いる。
指数部分 $2x-1$ を微分すると 2 になり、底 5 の微分ではさらに $\log 5$ が現れる。そのため、積分では $2\log 5$ の逆数で調整する。
計算すると次の結果を得る。

$$\int 5^{2x-1} dx=\frac{5^{2x-1}}{2\log 5}+C$$

検算は次のように行う。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5^{2x-1}}{2\log 5}\right)=\frac{5^{2x-1}\cdot 2\log 5}{2\log 5}$$

$$=5^{2x-1}$$

一次式の係数と底による微分係数の両方を考えることで、一般底の指数関数を積分するときの調整量を判断できる。

演習 5 の解答・解説

$x<0$ の区間では、$-x>0$ であるため、$\log(-x)$ を考えることができる。
$\log(-x)$ を微分すると、合成関数の微分より $\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$ となる。
したがって、$x<0$ の区間における $\frac{1}{x}$ の原始関数は $\log(-x)+C$ である。
検算すると、$\frac{d}{dx}\log(-x)=\frac{1}{x}$ となり、元の関数に戻る。
なお、$x<0$ の区間では $\log|x|$ と書いても同じ意味になる。

演習 6 の解答・解説

$\log(2x)$ は、$x>0$ で定義される対数関数である。
部分積分の考え方と同じく、微分すると扱いやすくなる因子を見る。ここでは $\log(2x)$ を微分することを考える。
$\frac{d}{dx}\log(2x)=\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x}$ であるため、$\log(2x)$ は $\frac{1}{x}$ へ変化する。
また、$\log(2x)=1\times\log(2x)$ と見て、$u=\log(2x)$、$dv=dx$ と置く。
このとき、$du=\frac{1}{x}dx$、$v=x$ である。
部分積分により、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int \log(2x)dx &= x\log(2x)-\int x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= x\log(2x)-\int 1dx\\ &= x\log(2x)-x+C\end{aligned}$$

検算すると、$\frac{d}{dx}(x\log(2x)-x)=\log(2x)+x\cdot\frac{1}{x}-1=\log(2x)$ となる。
したがって、$\int\log(2x)dx=x\log(2x)-x+C$ である。

演習 7 の解答・解説

主張 $\int a^x dx=a^x+C$ が正しいかを微分で確認する。
右辺の a^x を微分すると、$\frac{d}{dx}a^x=a^x\log a$ となる。
したがって、a^x をそのまま原始関数とするためには、$a^x\log a=a^x$ でなければならない。
$a^x\neq 0$ であるため、必要条件は $\log a=1$ である。
自然対数の性質より、$\log e=1$ であるから、$a=e$ の場合に限り成立する。
一般の $a>0$、$a\neq 1$ では、$\log a$ の係数を打ち消す必要があるため、$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$ となる。

演習 8 の解答・解説

与えられた $F'(x)=e^{2x}$ の右辺を積分して、条件を満たす $F(x)$ を求める。
指数部分の係数は 2 であるため、その逆数を掛ける。
したがって、$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ である。
ここで条件 $F(0)=1$ を利用する。
$F(0)=\frac{1}{2}e^0+C=\frac{1}{2}+C$ であるため、$\frac{1}{2}+C=1$ となる。
よって、$C=\frac{1}{2}$ である。
したがって、求める関数は $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$ である。
検算すると、$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2e^{2x}=e^{2x}$ となり、微分条件を満たす。
また、$F(0)=\frac{1}{2}e^0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ となり、与えられた初期条件も満たすことが確認できる。

©ミライコーチング