第 255 講 複素数の累乗

学習目標

- 複素数の正の整数乗を、同じ複素数を繰り返し掛ける計算として求められる。
- 累乗するたびに絶対値が掛け合わされ、偏角が加わることを図形的に説明できる。
- i の累乗の周期を利用して、大きな指数をもつ累乗を計算できる。
- 0 乗と負の整数乗の定義域を区別し、逆数を用いて計算できる。

1. 累乗は同じ変化の繰返しである

掛けるたびに長さと向きが変わる

正の整数 n に対し、複素数 z の n 乗は、z を n 個掛けた積

$$z^n = z \cdot z \cdots z$$

であり、右辺には z が n 個並ぶ。複素数の積では、絶対値は掛け合わされ、偏角は加わる。したがって、一つ前の累乗 z^k に z を掛けて z^{k+1} へ進むたび、原点からの距離は $|z|$ 倍され、向きは z の偏角だけ回転する。

この図形的な見方では $z \neq 0$ とする。この二つの変化を分けて見ることが、複素数の累乗を理解する判断軸である。$|z| > 1$ なら原点から遠ざかり、$0 < |z| < 1$ なら原点へ近づき、$|z| = 1$ なら同じ円周上を移る。向きについては、偏角を毎回同じだけ加える。$z = 0$ の偏角は定義されないが、正の整数 n に対して $0^n = 0$ である。

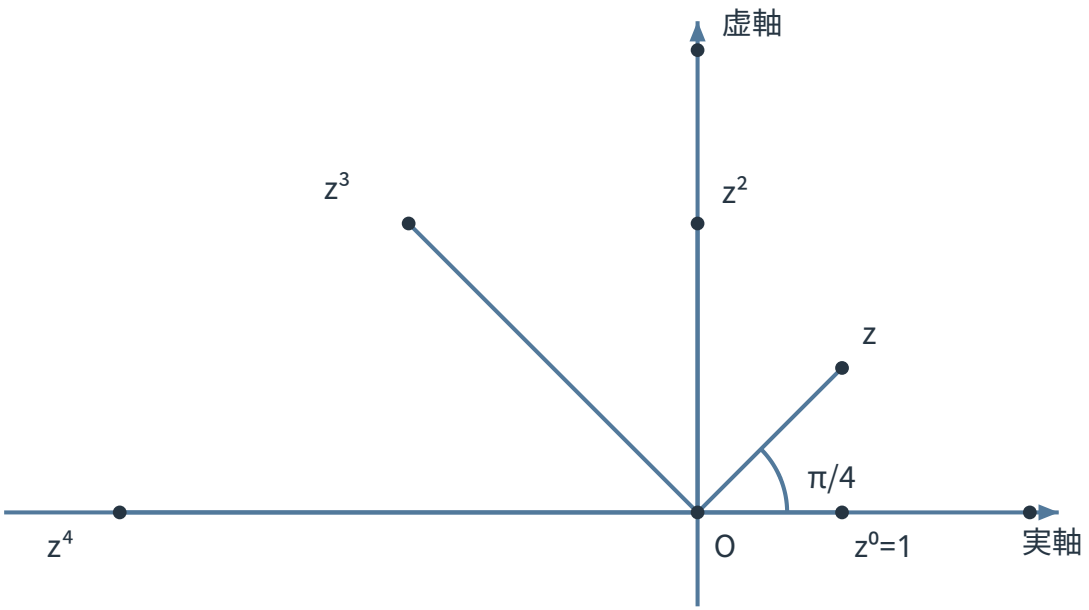

図 1　$z = 1 + i$ を繰り返し掛けると、距離は毎回 $\sqrt{2}$ 倍、向きは毎回 $\frac{\pi}{4}$ 回転する

図では $z = 1 + i$ であり、$|z| = \sqrt{2}$、偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。実際、

$$z^2 = 2i, \qquad z^3 = -2 + 2i, \qquad z^4 = -4$$

となる。点を結ぶ折れ線を作っているのではなく、各線分は原点からそれぞれの累乗へ向かう有限な線分である。

例題 1：直交形式で累乗を求める

$(1-2i)^3$ を $a+bi$ の形で表せ。

例題 1 の解答・解説

同じ数を 3 個掛けるので、先に 2 乗を計算すると

$$(1-2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$$

である。さらに $1-2i$ を掛けて、

$$(1-2i)^3 = (-3-4i)(1-2i) = -11+2i$$

となる。途中で $i^2=-1$ を用いる。指数 3 を係数と虚部へ別々に付けることはできない。

2. 絶対値と偏角を一段ずつ追う

極形式では変化が見える

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r>0$）とする。$z$ を一度掛ける操作は、絶対値を r 倍し、偏角を θ だけ増やす操作である。例えば 3 乗まで一段ずつ進めると、絶対値は

$$1 \to r \to r^2 \to r^3$$

と変わり、偏角は

$$0 \to \theta \to 2\theta \to 3\theta$$

と変わる。よって、

$$z^3 = r^3\{\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\}$$

である。同じ考え方で正の整数乗を追えるが、ここでは一回ごとの変化から累乗を捉える。一般の正の整数 n に対する定理として整理し証明することは次講で扱う。

例題 2：極形式を利用する

$z = \sqrt{3}+i$ とする。z^3 を $a+bi$ の形で表せ。

例題 2 の解答・解説

$|z|=2$、偏角は $\frac{\pi}{6}$ なので、z を掛けるたびに絶対値は 2 倍され、偏角は $\frac{\pi}{6}$ 増える。3 回掛けると絶対値は $2^3=8$、偏角は $3\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ になる。したがって、

$$z^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$$

である。直交形式で展開しても同じ答えになるが、極形式では大きさと向きの変化を別々に計算できる。

©ミライコーチング

偏角はそのままの数では一意でない

偏角は 2π の整数倍だけ異なる表し方をもつ。累乗後の角が 2π 以上または負になったときは、必要に応じて 2π の整数倍を加減し、指定された範囲へ直す。

3. i の累乗には周期がある

4 回ごとに同じ値へ戻る

i を順に掛けると

$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1$$

である。さらに i を掛けると同じ並びが繰り返される。これは、i を掛けるたびに絶対値を保ったまま反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転し、4 回で一周するためである。

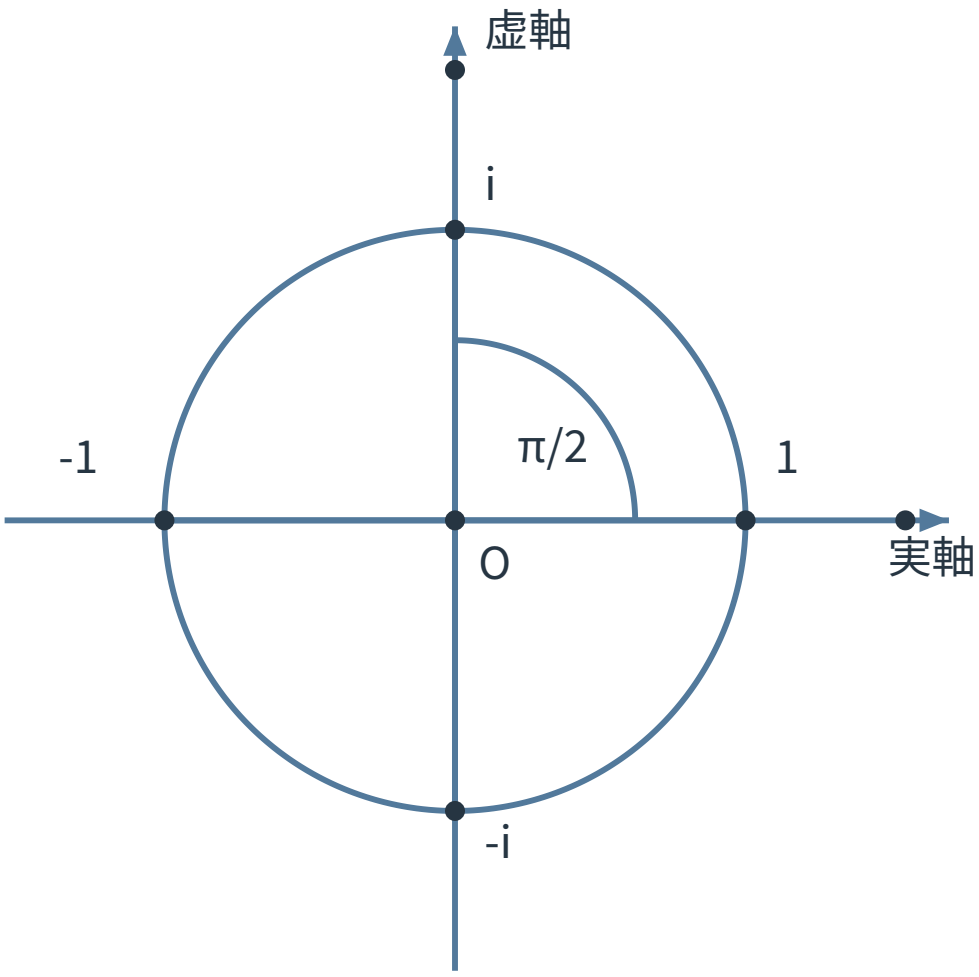

図 2　i の累乗は単位円上を $\frac{\pi}{2}$ ずつ回り、4 回で元の位置へ戻る

指数を 4 で割った余りを見る

整数 n を 4 で割った余りが $0, 1, 2, 3$ のとき、i^n はそれぞれ $1, i, -1, -i$ である。大きな指数でも、余りだけを見ればよい。

例題 3：大きな指数の計算

i^{2026} を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$2026 = 4 \cdot 506 + 2$ である。$i^4 = 1$ なので、

$$i^{2026} = \left(i^4\right)^{506} i^2 = 1^{506} \cdot (-1) = -1$$

である。指数そのものの大きさではなく、4 で割った余りが値を決める。

4. 0 乗と負の整数乗

指数が 0 以下の場合

$z \neq 0$ のとき $z^0 = 1$ と定める。また、正の整数 m に対して

$$z^{-m} = \frac{1}{z^m}$$

と定める。負の整数乗では逆数を取るため、$z = 0$ は扱えない。一方、正の整数 m に対する 0^m は 0 である。0^0 と 0^{-m} は定義しない。

例題 4：負の整数乗

$(1+i)^{-2}$ を $a + bi$ の形で表せ。

例題 4 の解答・解説

負の指数は逆数を表すので、

$$(1+i)^{-2} = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{2i}$$

である。分母を実数にするために $-i$ を分母と分子へ掛けると、

$$\frac{1}{2i} = \frac{-i}{2i(-i)} = -\frac{1}{2}i$$

となる。底 $1+i$ は 0 でないため、この負の整数乗は定義される。

5. 演習

演習 1：直交形式で計算する

$(2+i)^3$ を $a + bi$ の形で表せ。

演習 2：絶対値と偏角を追う

$z = 1 + \sqrt{3}i$ とする。z^3 を $a + bi$ の形で表せ。

演習 3：累乗の絶対値

$z = -1 + i$ とする。$|\, z^5 \,|$ を求めよ。

演習 4：i の周期

i^{123} を求めよ。

演習 5：0 乗と負の整数乗

次の値を求めよ。
(1) $(-3 + 4i)^0$
(2) i^{-7}

演習 6：定義できるかを判断する

次の式のうち、高校数学で通常の整数乗として定義されるものをすべて選び、その値を求めよ。
(1) 0^4　(2) 0^0　(3) 0^{-2}　(4) $(2i)^{-2}$

演習 1 の解答・解説

まず、

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$$

である。したがって、

$$(2 + i)^3 = (3 + 4i)(2 + i) = 2 + 11i$$

である。

演習 2 の解答・解説

$|\, z \,| = 2$、偏角は $\frac{\pi}{3}$ である。3 回掛けると絶対値は $2^3 = 8$、偏角は π になるので、

$$z^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$$

である。

演習 3 の解答・解説

$|\, z \,| = \sqrt{2}$ である。絶対値は積で掛け合わされるから、

$$|\, z^5 \,| = |\, z \,|^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 = 4\sqrt{2}$$

である。偏角を求める必要はない。

演習 4 の解答・解説

$123 = 4 \cdot 30 + 3$ なので、

$$i^{123} = \left(i^4\right)^{30} i^3 = -i$$

である。

演習 5 の解答・解説

(1) 底が 0 でないので、$(-3+4i)^0 = 1$ である。
(2) $-7 = -8 + 1$ と見れば、

$$i^{-7} = i^{-8} i = \left(i^4\right)^{-2} i = i$$

である。逆数から確かめても $i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = i$ となる。

演習 6 の解答・解説

(1) は正の整数乗なので定義され、$0^4 = 0$ である。
(2) の 0^0 は定義しない。(3) の 0^{-2} は $\frac{1}{0^2}$ となり、0 で割るため定義しない。
(4) は底が 0 でないので定義され、

$$(2i)^{-2} = \frac{1}{(2i)^2} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

である。したがって、定義されるものは (1) と (4) である。

累乗を計算するときの確認事項

- 指数が正なら、同じ複素数を何個掛けるかを確認する。
- 極形式では、絶対値の倍率と偏角の増加を分けて追う。
- i の累乗は指数を 4 で割った余りで判断する。
- 指数が 0 または負なら、底が 0 でないことを先に確認する。
- 展開後は $i^2 = -1$ を用いて $a + bi$ の形へ整理する。

©ミライコーチング