

第 103 講 弧度法

学習目標

- 弧度法を、半径に対する弧長の比として説明できる。
- $180^\circ = \pi \text{ rad}$ をもとに、度数と弧度を相互に変換できる。
- 弧度で表された中心角に対して、弧長 $l = r\theta$ を使える。
- 弧長と中心角から、円の半径を求められる。
- 負の角の弧度と、普通の弧長の違いを区別できる。

1. 角を弧の長さで測る

同じ角でも、弧の長さは半径によって変わる

円の中心 O から 2 本の半径を引くと、その間に中心角ができる。同じ中心角であっても、円の半径が大きくなれば、それに対応する弧も長くなる。

そこで、弧の長さ l だけを見るのではなく、半径 r に対して弧がどれくらいの長さになっているかを表す比 $\frac{l}{r}$ に注目する。この比を使って角の大きさを表す方法が**弧度法**である。

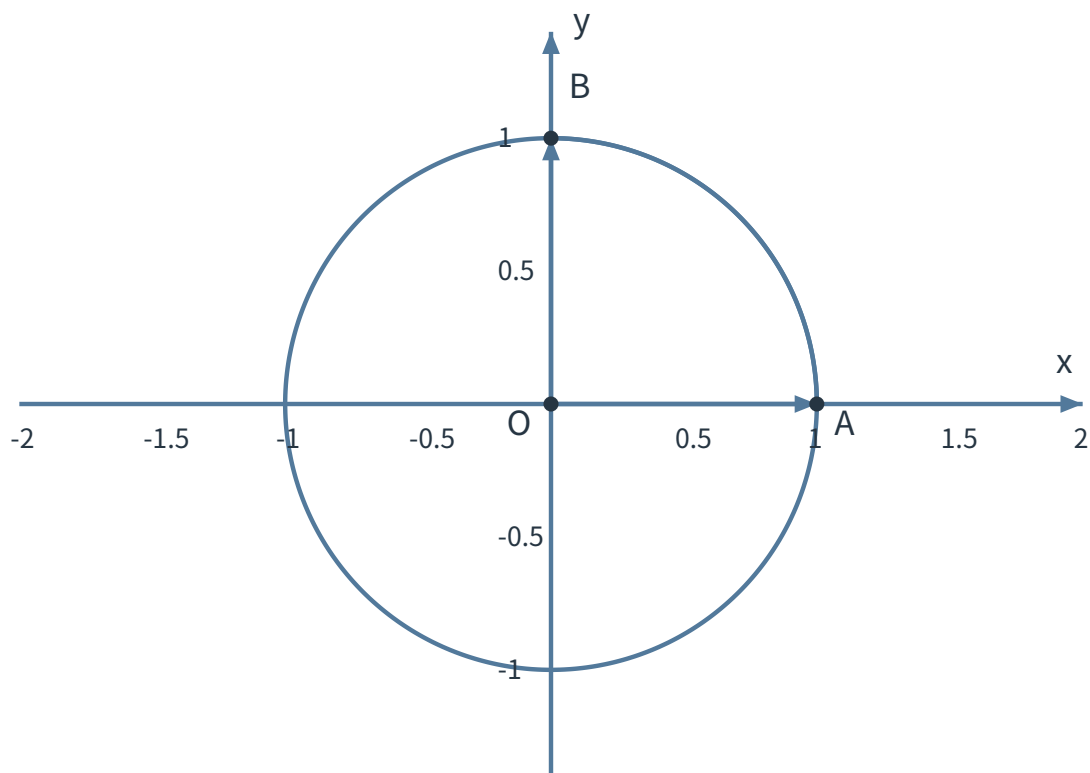


図1 半径1の四分円弧：中心角 90° 、弧長 $\pi/2$

弧度法の定義

半径 r の円で、長さ l の弧に対する中心角を θ とする。ただし、 $r > 0$ 、 $l \geq 0$ とし、この弧に対する中心角は $\theta \geq 0$ とする。

このとき、中心角の弧度を

$$\theta = \frac{l}{r}$$

と定める。この θ を角の大きさとして用いる方法が弧度法であり、単位はradである。

例えば $l = r$ なら $\theta = 1$ であるから、この中心角は1 radである。

弧度は長さではなく角の大きさである

$\frac{l}{r}$ では、分子 l も分母 r も長さである。その比を使って表される θ は、中心角の大きさを表している。したがって、radは角の単位であり、弧長の長さの単位ではない。また、 π は数であり、radそのものではない。

2. なぜ $180^\circ = \pi \text{ rad}$ なのか**半径1の半円から考える**

半径1の円の円周は 2π であるから、半円の弧長は π である。

半円に対応する中心角は度数法では 180° である。一方、弧度法では $r = 1$ 、 $l = \pi$ なので、中心角は $\theta = \frac{\pi}{1} = \pi$ となる。

したがって、 180° は $\pi \text{ rad}$ に等しい。

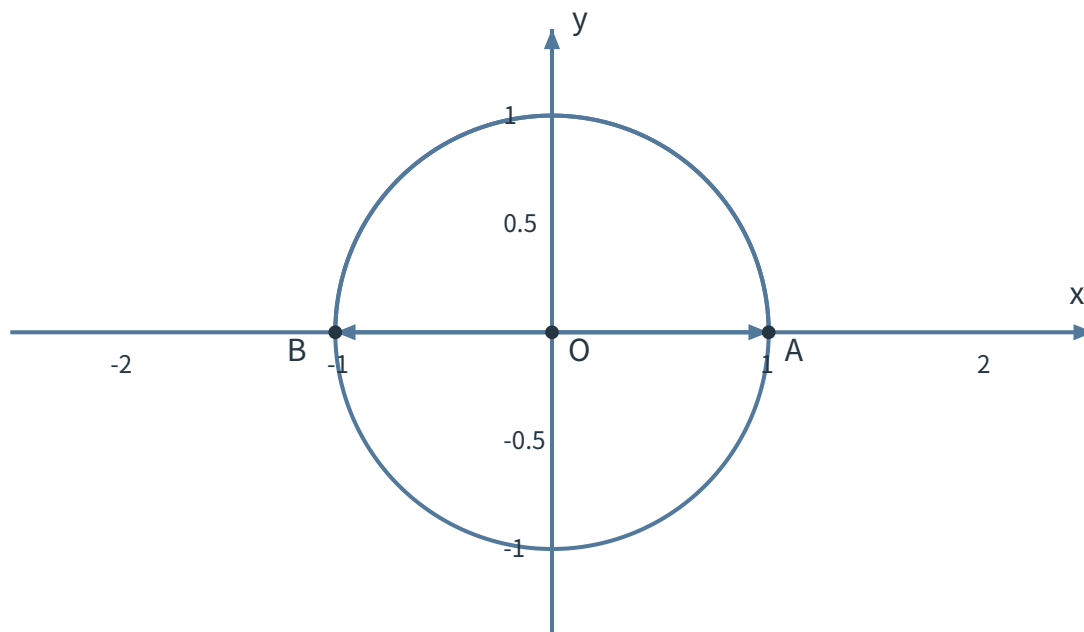


図2 半径1の半円弧：中心角 180° 、弧長 π なので中心角は $\pi \text{ rad}$

度数法と弧度法をつなぐ基本関係

半径1の半円から、 $180^\circ = \pi \text{ rad}$ である。

したがって、1周については $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ である。

また、両辺を180で割れば $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ であり、両辺を π で割れば $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ である。

3. 度数と弧度を変換する

度数から弧度へ変換する

度数で表された角を弧度へ直すときは、 $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ を使う。

例えば 60° なら、

$$\begin{aligned} 60^\circ &= 60 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} \\ &= \frac{\pi}{3} \text{ rad} \end{aligned}$$

となる。

度数に $\frac{\pi}{180}$ を掛ける、と考えるとよい。

弧度から度数へ変換する

弧度で表された角を度数へ直すときは、 $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ を使う。

例えば $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ なら、

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2} \text{ rad} &= \frac{3\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= 270^\circ \end{aligned}$$

となる。

弧度の数値に $\frac{180^\circ}{\pi}$ を掛ける、と考えればよい。

度と rad を同じ角の数値として足さない

90° と $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ は、同じ大きさの角を異なる単位で表したものである。しかし、 $90 + \frac{\pi}{2}$ のように、度数の数値と弧度の数値をそのまま足すことはできない。

計算するときは、角の単位をどちらか一方にそろえる必要がある。

負の角でも符号はそのまま保つ

弧度法でも、反時計回りを正、時計回りを負とする。

例えば -90° を弧度へ直すと、

$$-90^\circ = -90 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

である。

換算するときに負号を消してはいけない。

4. 同じ角なら、弧長と半径の比は同じになる

半径が変わっても弧度は変わらない

第1節の図のように、半径1の円で中心角が 90° なら、対応する弧長は $\frac{\pi}{2}$ である。したがって、弧長と半径の比は $\frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$ である。

半径を2倍にすると、同じ角に対する弧長も2倍になる

同じ 90° でも、半径を2にすると弧長は π になる。このときの比は $\frac{\pi}{2}$ であり、半径1の場合と同じである。

つまり、中心角が同じなら、半径が変わって弧長が変化しても $\frac{l}{r}$ は変わらない。この不変な比を角の大きさとして使うのが弧度法である。

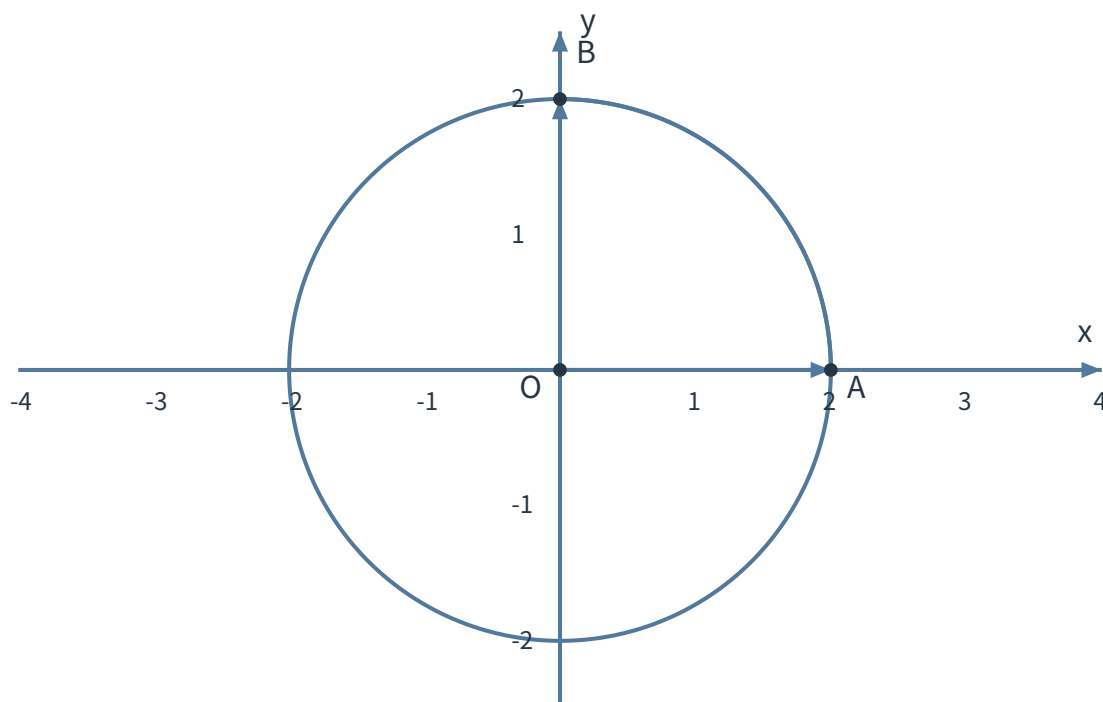


図3 半径2、中心角 90° では弧長 π 、弧長÷半径は $\pi/2$

5. 弧度から弧長を求める

$\theta = \frac{l}{r}$ を弧長について解く

弧度法の定義 $\theta = \frac{l}{r}$ を l について解くと、 $l = r\theta$ となる。

したがって、半径 r と中心角 θ が弧度で分かっているならば、対応する弧長は $l = r\theta$ で求められる。ただし、この式で θ は弧度で表された0以上の中心角である。

弧長の公式

半径 $r > 0$ 、中心角 $\theta \geq 0$ を弧度で表したとき、対応する弧長 l は $l = r\theta$ である。

この式は弧度法の定義 $\theta = \frac{l}{r}$ を変形したものであり、別の公式を新しく覚えているわけではない。

負の角と普通の弧長は区別する

一般角では $-\frac{\pi}{2}$ radのような負の角も扱う。しかし、普通の弧長 l は長さなので負にはならない。半径 r の円を $-\frac{\pi}{2}$ radだけ回転したとき、その回転によって通る弧の長さを求めるなら、角の大きさの絶対値を使い、 $l = r |\theta|$ と考える。

角の符号は回転方向を表すが、弧長そのものの符号を表しているわけではない。

6. 例題

例題 1：度数を弧度へ直す

次の角を弧度で表せ。

- (1) 30°
- (2) 120°
- (3) -90°

例題 1 の解答・解説

度数から弧度へ直すには、度数に $\frac{\pi}{180}$ を掛ける。

(1)

$$30^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

(2)

$$120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

(3)

$$-90^\circ = -90 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

負の角では、換算後も負号を保つ。

例題 2：弧度を度数へ直す

次の角を度数で表せ。

- (1) $\frac{\pi}{4}$ rad
- (2) $\frac{3\pi}{2}$ rad
- (3) $-\frac{2\pi}{3}$ rad

例題 2 の解答・解説

弧度から度数へ直すには、弧度の数値に $\frac{180^\circ}{\pi}$ を掛ける。

(1)

$$\frac{\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$$

(2)

$$\frac{3\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

(3)

$$-\frac{2\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -120^\circ$$

例題 3：弧長を求める

半径6の円で、中心角が $\frac{2\pi}{3}$ rad である。この中心角に対する弧長 l を求めよ。

例題 3 の解答・解説

中心角が弧度で与えられているので、 $l = r\theta$ を使う。

$$\begin{aligned} l &= 6 \times \frac{2\pi}{3} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

したがって、弧長は 4π である。

例題 4：図から弧長を考える

次の図は、半径3の円で中心角が 90° 、すなわち $\frac{\pi}{2}$ rad である場合を表している。弧 AB の長さを求めよ。

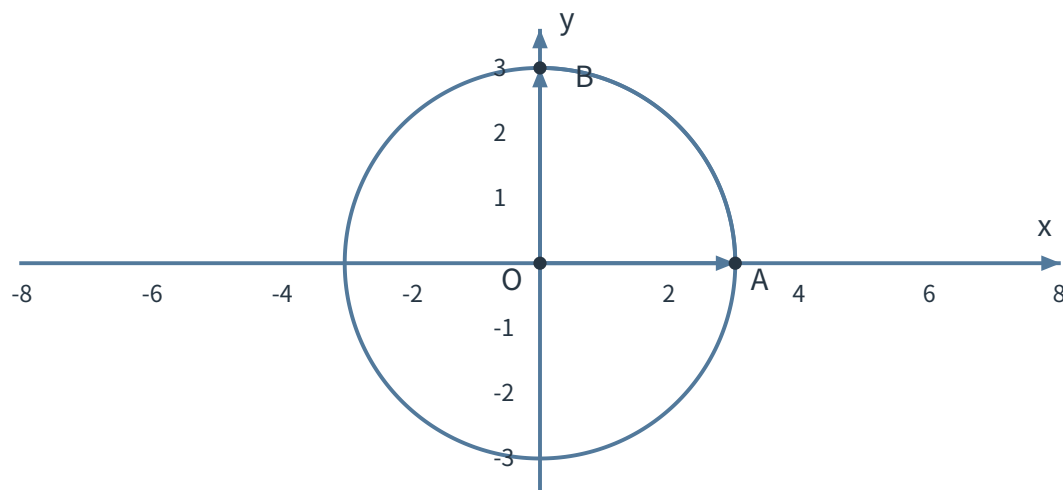


図 4 半径 3、中心角 $90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$ の四分円弧 AB

例題 4 の解答・解説

中心角は $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ なので、 $l = r\theta$ を使う。

$$\begin{aligned} l &= 3 \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

したがって、弧 AB の長さは $\frac{3\pi}{2}$ である。

7. 演習問題

演習 1：度数から弧度への変換

次の角を弧度で表せ。

- (1) 45°
- (2) 90°
- (3) 180°
- (4) -270°

演習 2：弧度から度数への変換

次の角を度数で表せ。

- (1) $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$
- (2) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
- (3) $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
- (4) $-\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

演習 3：同じ角の 2 つの表し方

次の組のうち、同じ大きさの角を表しているものをすべて選べ。

- ・ ア 60° と $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
- ・ イ 90° と $\pi \text{ rad}$
- ・ ウ 180° と $\pi \text{ rad}$
- ・ エ 270° と $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

演習 4：弧長を求める

半径 8 の円で、中心角が $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ である。この中心角に対する弧長を求めよ。

演習 5：半径を求める

ある円で、中心角が $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ 、それに対する弧長が 5π である。円の半径を求めよ。

演習 6：半径を変えたときの弧長

中心角が $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ であるとする。

- (1) 半径 4 の円で、対応する弧長を求めよ。
- (2) 半径 10 の円で、対応する弧長を求めよ。
- (3) (1)、(2) について、それぞれ $\frac{1}{r}$ を求めよ。

演習 7：負の角と弧長

半径 5 の円で、正の x 軸から時計回りに $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ 回転する。この角を符号付きの弧度で表し、回転によって通る弧の長さを求めよ。

演習 8：弧度法の意味

半径 4 の円で長さ 3 の弧に対する中心角を θ とする。

- (1) θ を弧度で求めよ。
- (2) 半径 8 の円で、(1) と同じ中心角に対する弧長を求めよ。

8. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

度数に $\frac{\pi}{180}$ を掛ける。

(1)

$$45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

(2)

$$90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

(3) $180^\circ = \pi \text{ rad}$ である。

(4)

$$-270^\circ = -270 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

演習 2 の解答・解説

弧度の数値に $\frac{180^\circ}{\pi}$ を掛ける。

(1)

$$\frac{\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$$

(2)

$$\frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$$

(3)

$$\frac{3\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

(4)

$$-\frac{\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -45^\circ$$

演習 3 の解答・解説

アは $\frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$ なので正しい。

イは $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ であり、 90° ではないので誤りである。

ウは $180^\circ = \pi \text{ rad}$ なので正しい。

エは $\frac{3\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$ なので正しい。

したがって、同じ大きさの角を表しているのはア、ウ、エである。

演習 4 の解答・解説

中心角が弧度で与えられているので、 $l = r\theta$ を使う。

$$\begin{aligned} l &= 8 \times \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

したがって、弧長は $\frac{8\pi}{3}$ である。

演習 5 の解答・解説

$l = r\theta$ に $l = 5\pi$ 、 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ を代入する。

$$\begin{aligned} 5\pi &= r \times \frac{5\pi}{6} \\ r &= 6 \end{aligned}$$

したがって、半径は6である。

演習 6 の解答・解説

(1) $r = 4$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ なので、

$$l = 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

である。

(2) $r = 10$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ なので、

$$l = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi$$

である。

(3) (1)では $\frac{l}{r} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 、(2)では $\frac{l}{r} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ である。

半径と弧長は変化しているが、同じ中心角なら $\frac{l}{r}$ はどちらも $\frac{\pi}{2}$ になる。

演習 7 の解答・解説

時計回りの回転なので、符号付きの角は $-\frac{\pi}{3}$ rad である。

一方、回転によって通る普通の弧長は負にならないので、角の大きさの絶対値を使う。

$$\begin{aligned} l &= 5 \left| -\frac{\pi}{3} \right| \\ &= \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

したがって、角は $-\frac{\pi}{3}$ rad、弧長は $\frac{5\pi}{3}$ である。

演習 8 の解答・解説

(1) 定義より $\theta = \frac{l}{r} = \frac{3}{4}$ rad である。

(2) 同じ中心角なので、半径8の円の弧長は $l = r\theta = 8 \times \frac{3}{4} = 6$ である。半径が4から8へ2倍になると、弧長も3から6へ2倍になる。