第 031 講 失われる力学的エネルギーと仕事率

この講でできるようになること

- 力学的エネルギーの変化と、摩擦力や外力がした仕事を結び付けて説明できる。
- 摩擦力がした負の仕事と、失われた力学的エネルギーの正の量を区別できる。
- 動摩擦力によって減速する物体について、到達できる位置や停止位置を判断できる。
- 仕事と時間から平均仕事率を求め、仕事をする速さを比較できる。
- 等速運動でも、個々の力の仕事率がゼロとは限らない理由を説明できる。

1. 力学的エネルギーはどこへ行くのか

滑らかな斜面を下る物体では、重力による位置エネルギーが運動エネルギーに変わり、力学的エネルギーが保存される場合がある。

ところが、粗い床を滑る物体は、手を離すとしだいに遅くなり、最後には停止する。水平な床では高さが変わらないため、運動エネルギーが減った分を重力による位置エネルギーの増加で説明することはできない。

減った力学的エネルギーは、どこへ行ったのだろうか。

力学的エネルギーを考える範囲

まず、エネルギーを考える対象である「系」を決める。

この講では、基本的に物体と地球、必要に応じて物体に接続されたばねを合わせた系を考える。物体の運動エネルギーを K、重力による位置エネルギーを U_g、ばねの弾性エネルギーを U_s とする。

重力による位置エネルギーは、あらかじめ決めた高さ $h=0$ を基準として表す。ばねの弾性エネルギーは、自然長からの符号付き変形量を x とし、自然長 $x=0$ を基準とする。ばねが存在しない場合には $U_s=0$ とする。

力学的エネルギー

力学的エネルギー E は、運動エネルギーと位置エネルギーの和である。

$$E = K + U_g + U_s$$

それぞれの式は次のとおりである。

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U_g = mgh$$

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

ここで、m は質量、v は速さ、g は重力加速度の大きさ、h は基準からの高さ、k はばね定数、x は自然長からの変形量である。

これらのエネルギーの単位は、いずれも J（ジュール）である。

高さの基準とばねの自然長を固定したら、途中で基準を変えずに始状態 A と終状態 B を比較する。

重力とばねの力は、それぞれ位置エネルギーとして計算に取り込んでいる。それ以外の力がした仕事の合計を W_{other} とする。

力学的エネルギーと仕事の関係

始状態 A から終状態 B への変化について、

$$\Delta E = E_B - E_A$$

とすると、

$$\Delta E = W_{\text{other}}$$

が成り立つ。

つまり、

$$E_B = E_A + W_{\text{other}}$$

である。

W_{other} は、重力とばねの力以外の力が、物体に対してした仕事の合計である。重力やばねの力がした仕事を、位置エネルギーの変化に加えてもう一度足してはいけない。

この式から、次のことが分かる。

それ以外の力がした仕事	力学的エネルギーの変化
$W_{\text{other}} > 0$	増加する
$W_{\text{other}} = 0$	保存される
$W_{\text{other}} < 0$	減少する

大切なのは、摩擦力などの「非保存力」が存在するという理由だけで、力学的エネルギーの減少が決まるわけではないことである。非保存力を含む各力の仕事を合計し、その符号から判断する。

たとえば、外から物体を押す力が正の仕事をすれば、摩擦が働いていても力学的エネルギーが増加する場合がある。

2. 摩擦によって失われる力学的エネルギー

動摩擦力がした仕事

床に対して動かない水平な粗い面を、物体が滑っている場合を考える。

床から受ける動摩擦力の大きさを f、動摩擦係数を μ、垂直抗力の大きさを N とする。

滑っている間の動摩擦力の大きさは、

$$f = \mu N$$

である。

水平な床で、物体の鉛直方向の加速度がゼロであり、重力と垂直抗力以外に鉛直成分をもつ力が働かなければ、

$$N = mg$$

となる。

ただし、斜面上の物体や、斜めの外力を受ける物体では、無条件に $N = mg$ としてはいけない。

ここでは、床は静止しており、物体が床に対して滑る間、動摩擦力の大きさが一定であるとする。

動摩擦力は物体の滑る向きと反対向きに働くため、物体が床に対して正の距離 s だけ滑ったとき、その仕事は負になる。

$$W_f = -fs$$

仕事の単位は J であり、$\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{J}$ である。

摩擦力以外の「それ以外の力」が仕事をせず、重力やばねの力を位置エネルギーに取り込んでいるなら、

$$E_B - E_A = W_f$$

となる。

$W_f < 0$ であるため、$E_B < E_A$ である。

失われた力学的エネルギー

重力とばねの力以外では摩擦力だけが仕事をする場合、失われた力学的エネルギーの量を L とする。

$$L = E_A - E_B = -W_f$$

したがって、

$$L = fs \geq 0$$

である。

摩擦力がした仕事 W_f は負の量である。一方、失われた量 L は正またはゼロで表す。

他の外力も仕事をする場合、この講では摩擦による寄与分 $-W_f$ を摩擦による損失量と呼ぶ。この量は、力学的エネルギー全体の減少量 $E_A - E_B$ とは一般に一致しない。

力学的エネルギーが減っても、全エネルギーは消えない

摩擦によって物体の力学的エネルギーが減っても、全エネルギーが消滅したわけではない。

例えば、物体と床を合わせた範囲まで考えると、摩擦によって接触部分の物体や床の内部エネルギーが増加する。力学的エネルギーが別の形のエネルギーへ移ったのである。

ただし、動く床やベルトなど、今回と異なる条件まで含めて、常に $-W_f$ が全発熱量と一致すると考えてはいけない。

©ミライコーチング

例題で確かめる

1

質量 2.0 kg の物体が、水平で静止した粗い床の上を速さ 6.0 m/s で右向きに滑っている。動摩擦係数を 0.20、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

物体には水平方向の外力は働かず、鉛直方向には重力と垂直抗力だけが働く。空気抵抗は無視する。

床の高さを重力による位置エネルギーの基準 $h=0$ とし、物体と地球を系とする。初めの状態を A とする。

(1) 垂直抗力と動摩擦力の大きさ、A での運動エネルギーを求めよ。

(2) A から 5.0 m 滑った状態 B における、摩擦力の仕事、失われた力学的エネルギー、運動エネルギー、速さを求めよ。

(3) 物体が停止するまでに滑る距離を求めよ。

(4) A から 10 m 先の地点に到達できるか。理由とともに答えよ。

解答・解説

(1) 鉛直方向には加速度がなく、重力と垂直抗力がつり合うため、

$$\begin{aligned} N &= mg \\ &= (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 20\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。したがって動摩擦力の大きさは、

$$\begin{aligned} f &= \mu N \\ &= 0.20 \times 20\,\mathrm{N} \\ &= 4.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

A での運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_A &= \frac{1}{2}mv_A^2 \\ &= \frac{1}{2}(2.0\,\mathrm{kg})(6.0\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 36\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

(2) 床は水平なので、重力による位置エネルギーは A、B ともにゼロである。動摩擦力は左向き、変位は右向きであるため、

$$\begin{aligned} W_f &= -fs \\ &= -(4.0\,\mathrm{N})(5.0\,\mathrm{m}) \\ &= -20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

失われた力学的エネルギーの量は、

$$L = -W_f = 20\,\mathrm{J}$$

である。

摩擦力だけが仕事をするため、

$$\begin{aligned} K_B - K_A &= W_f \\ K_B &= 36\,\mathrm{J} - 20\,\mathrm{J} \\ &= 16\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

$K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$ より、

$$\begin{aligned} v_B^2 &= \frac{2K_B}{m} \\ &= \frac{2(16\,\mathrm{J})}{2.0\,\mathrm{kg}} \\ &= 16\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

したがって速さは、

$$v_B = 4.0\,\mathrm{m/s}$$

である。

(3) 停止した状態 C では運動エネルギーがゼロになる。動摩擦力が滑っている間ずっと 4.0 N であることから、停止までの距離を s_C とすると、

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{J} - 36\,\mathrm{J} &= -(4.0\,\mathrm{N})s_C \\ s_C &= \frac{36\,\mathrm{J}}{4.0\,\mathrm{N}} \\ &= 9.0\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

(4) 停止位置は A から 9.0 m 先である。したがって、10 m 先には到達できない。

動摩擦力の式を停止位置より先まで延長して計算してはいけない。停止した物体に対して、滑っている間の動摩擦力の式をそのまま適用することはできない。

©ミライコーチング

エネルギー計算では到達可能性も確かめる

運動エネルギー $K = \frac{1}{2}mv^2$ は負にならない。

計算上、ある地点で運動エネルギーが負になるようなら、その地点まで同じ運動条件を保って到達できない可能性を考える。まず停止位置などの成立範囲を調べることが重要である。

3. 外力が働けば、力学的エネルギーは増えることもある

摩擦力が負の仕事をしていても、同時に外力が正の仕事をするなら、二つの仕事の合計でエネルギー変化が決まる。

水平な静止床を物体が右へ滑り、その物体を右向きに押し続ける場合を考える。

このとき、右向きに働く押す力の仕事は正、左向きに働く動摩擦力の仕事は負である。

重力と垂直抗力の仕事がゼロであれば、

$$K_B - K_A = W_F + W_f$$

となる。ここで W_F は外から押す力の仕事、W_f は動摩擦力の仕事である。

次の図は、この状況を水平な力だけに注目して描いた部分図である。

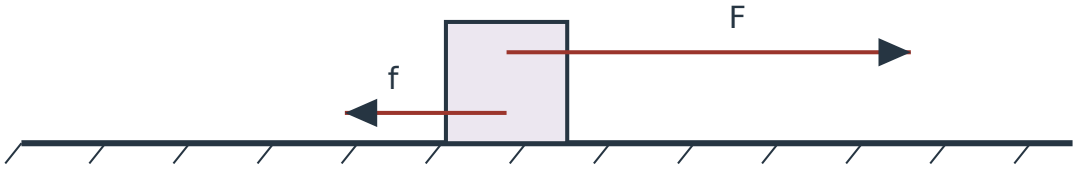

図 1　右へ滑る物体 A に働く水平力だけの部分図。外力 10 N、動摩擦力 4 N。

物体 A の運動は質点として扱い、回転は考えない。力の矢印は大きさ 1 N を図上の 20 px に対応させており、向きと大きさの比較を表している。二つの矢印の始点を上下にずらしているのは見やすくするためであり、異なる作用位置による回転を意味しない。

図には鉛直方向の力を描いていないが、実際には上向きの垂直抗力と下向きの重力も働いている。水平移動中に鉛直方向の変位がないため、これらの仕事はゼロである。

2

図の物体 A の質量を 2.0 kg とする。A は初め右向きに速さ 2.0 m/s で滑っており、その後も右へ 5.0 m 滑る。

外から右向きに働く一定の力は 10 N、動摩擦力の大きさは 4.0 N で一定とする。床は静止した水平面であり、鉛直方向には重力と垂直抗力だけが働いてつり合い、空気抵抗は無視できる。

物体と地球を系とし、床の高さを $h = 0$ とする。移動後の状態を B とする。

(1) 外から押す力と動摩擦力がした仕事をそれぞれ求めよ。

(2) 運動エネルギーの変化、B での運動エネルギー、B での速さを求めよ。

(3) 摩擦によって失われた力学的エネルギーの量と、物体の力学的エネルギー全体の変化を比較して説明せよ。

解答・解説

(1) 外力は変位と同じ右向きなので、

$$\begin{aligned} W_F &= Fs \\ &= (10\,\mathrm{N})(5.0\,\mathrm{m}) \\ &= 50\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

摩擦力は変位と反対向きなので、

$$\begin{aligned} W_f &= -fs \\ &= -(4.0\,\mathrm{N})(5.0\,\mathrm{m}) \\ &= -20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

(2) 重力と垂直抗力の仕事はそれぞれ 0 J である。したがって、

$$\begin{aligned}\Delta K &= W_F + W_f \\ &= 50\,\mathrm{J} - 20\,\mathrm{J} \\ &= 30\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

である。

初めの運動エネルギーは、

$$\begin{aligned}K_A &= \frac{1}{2}mv_A^2 \\ &= \frac{1}{2}(2.0\,\mathrm{kg})(2.0\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 4.0\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned}K_B &= K_A + \Delta K \\ &= 4.0\,\mathrm{J} + 30\,\mathrm{J} \\ &= 34\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

である。

$K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$ より、

$$\begin{aligned}v_B^2 &= \frac{2K_B}{m} \\ &= \frac{2(34\,\mathrm{J})}{2.0\,\mathrm{kg}} \\ &= 34\,\mathrm{m^2/s^2}\end{aligned}$$

したがって、

$$v_B = \sqrt{34}\,\mathrm{m/s}$$

となる。

(3) 摩擦力だけに注目した損失量は、

$$L = -W_f = 20\,\mathrm{J}$$

である。

一方、外力が 50 J の正の仕事をしたため、力学的エネルギー全体は 30 J 増加した。

つまり、**摩擦による損失が存在することと、物体の力学的エネルギー全体が減少することは同じではない**。

4. 同じ仕事でも、かかる時間が違う

ここまでは、力が「どれだけの仕事をしたか」を考えてきた。

次に、同じ仕事をする場合でも、短い時間で行うのか、長い時間をかけて行うのかを比較する。

たとえば、同じ荷物を同じ高さまで持ち上げる二つの装置があるとする。持ち上げる力と移動距離が同じであれば、持ち上げる仕事は同じである。

しかし、一方が短い時間で持ち上げれば、その装置は単位時間あたりにより大きな仕事をしたことになる。

この違いを表す物理量が**仕事率**である。

平均仕事率

ある力や装置が時間 Δt の間にした仕事を W とすると、その区間の平均仕事率 $\bar{P}$ は、

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

で定義される。

仕事率の単位はワットであり、単位記号は W である。

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$$

すなわち、1 W は 1 秒あたり 1 J の仕事をする割合を意味する。

仕事を表す量記号 W と、ワットを表す単位記号 W は異なる役割をもつ。

また、

$$1\,\mathrm{kW} = 1000\,\mathrm{W}$$

である。

平均仕事率を求めるときは、対象の力や装置がした仕事と、その仕事をした時間区間を対応させなければならない。

例えば、ある力が正の仕事をした場合、同じ仕事量なら、時間が短いほど平均仕事率は大きい。

3

ある装置が、一定時間の間に 1200 J の正の仕事をする。

(1) 仕事に 30 s かかった場合の平均仕事率を求めよ。

(2) 同じ 1200 J の仕事を 20 s で行った場合の平均仕事率を求め、(1) と比較せよ。

(3) 別の装置が 3.6 kJ の正の仕事を 2 分間で行った。その平均仕事率を求めよ。

解答・解説

(1) 定義式から、

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{W}{\Delta t} \\ &= \frac{1200\,\mathrm{J}}{30\,\mathrm{s}} \\ &= 40\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

である。

(2) 同じ仕事を $20\,\mathrm{s}$ で行うと、

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1200\,\mathrm{J}}{20\,\mathrm{s}} \\ &= 60\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

となる。

仕事の量は変わっていないが、時間が短くなったため平均仕事率は大きくなる。

(3) まず単位をそろえる。

$$3.6\,\mathrm{kJ} = 3600\,\mathrm{J}$$

$$2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{3600\,\mathrm{J}}{120\,\mathrm{s}} \\ &= 30\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

である。

三つの状況を比較すると、次のようになる。

状況	仕事	時間	平均仕事率
(1)	$1200\,\mathrm{J}$	$30\,\mathrm{s}$	$40\,\mathrm{W}$
(2)	$1200\,\mathrm{J}$	$20\,\mathrm{s}$	$60\,\mathrm{W}$
(3)	$3600\,\mathrm{J}$	$120\,\mathrm{s}$	$30\,\mathrm{W}$

この表から、仕事量の大きさと平均仕事率の大きさは必ずしも同じ順序にならないことが分かる。

5. 力と速さから仕事率を求める

一定の力が、直線上を一定の速さで動く物体に働く場合を考える。

力の大きさを F、物体の速さを v、経過時間を Δt とする。

物体の進む向きと力の向きが同じであれば、物体が進んだ距離 s について、

$$W = Fs$$

である。

一定の速さで進むので、

$$s = v\Delta t$$

となる。

これらを平均仕事率の式に代入すると、

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{W}{\Delta t} \\ &= \frac{Fs}{\Delta t} \\ &= \frac{Fv\Delta t}{\Delta t} \\ &= Fv\end{aligned}$$

が得られる。

一定の力と速さによる仕事率

力が一定で、物体が直線上を一定の速さで動き、力と進行方向が同じとき、

$$P = Fv$$

が成り立つ。

F は力の大きさ、v は速さである。この条件では仕事率が時間によって変わらないため、区間平均仕事率と同じ値になる。

力が進行方向と反対向きで、大きさが一定なら、同じ条件でその力の仕事率は、

$$P = -Fv$$

となる。

力の向きと速さの条件を確認する

$P = Fv$ を大きさだけで機械的に使うと、仕事率の正負を間違える。

力が進行方向と同じなら仕事率は正、反対向きなら負である。今回の式は、力と変位が一直線上にあり、力と速さが一定という条件で使う。

物体の速さが変化する区間について、終点の速さをそのまま区間全体の平均仕事率の計算に使ってはいけない。その場合は、まず実際にした仕事と経過時間から $\bar{P} = \frac{W}{\Delta}t$ を求める。

等速運動でも仕事率がゼロとは限らない

一定の速さで荷物を持ち上げる場合を考える。

物体の加速度がゼロなら、持ち上げる力と重力はつり合う。したがって、合力がした仕事はゼロであり、運動エネルギーも変化しない。

しかし、持ち上げる力は物体の移動方向と同じ向きに働いているため、正の仕事をしている。

その一方で、重力は負の仕事をしている。二つの仕事を合計するとゼロになるのである。

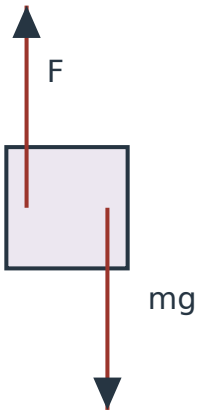

図 2　一定速さで持ち上げられる物体 A。持上げ力 F と重力 mg は同じ大きさ。

この図は、上向きの持上げ力と下向きの重力という、物体 A に働くすべての力を示している。空気抵抗は考えず、持ち上げる機構の構造は省略する。

物体は質点として扱い、回転は考えない。矢印を左右の異なる位置から描いているのは、同じ大きさで反対向きの二つの力を見やすくするためである。力の作用位置の違いによる回転を表してはいない。上向きと下向きの矢印は同じ尺度で描いている。

物体の移動方向は鉛直上向きである。図には速度の矢印を重ねていない。

4

質量 $50\,\mathrm{kg}$ の物体 A を、一定の速さ $0.50\,\mathrm{m/s}$ で鉛直上向きに $4.0\,\mathrm{m}$ 持ち上げる。

重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、持ち上げる機構は理想的で、摩擦などの損失はないものとする。物体には鉛直上向きの持上げ力と鉛直下向きの重力だけが働く。

物体と地球を系とし、持ち上げ開始位置を高さ $h = 0$ とする。開始状態を A、終了状態を B とする。

(1) 持ち上げる力の大きさと、持ち上げにかかる時間を求めよ。

(2) 持ち上げる力の仕事と、その仕事率を求めよ。

(3) 重力がした仕事、合力がした仕事、運動エネルギーの変化を求めよ。

(4) 運動エネルギーが変化しないのに、持ち上げる力の仕事率が正になる理由を説明せよ。

©ミライコーチング

解答・解説

(1) 物体は一定の速さで動くので、加速度はゼロである。したがって、持上げ力と重力がつり合う。

$$\begin{aligned} F &= mg \\ &= (50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 500\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

移動距離を速さで割ると、

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{s}{v} \\ &= \frac{4.0\,\mathrm{m}}{0.50\,\mathrm{m/s}} \\ &= 8.0\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

となる。

(2) 持ち上げる力は物体の変位と同じ上向きなので、

$$\begin{aligned} W_F &= Fs \\ &= (500\,\mathrm{N})(4.0\,\mathrm{m}) \\ &= 2000\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

平均仕事率は、

$$\begin{aligned} \bar{P}_F &= \frac{W_F}{\Delta t} \\ &= \frac{2000\,\mathrm{J}}{8.0\,\mathrm{s}} \\ &= 250\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

となる。

力と速度が同じ上向きで、どちらの大きさも一定であるため、

$$\begin{aligned} P_F &= Fv \\ &= (500\,\mathrm{N})(0.50\,\mathrm{m/s}) \\ &= 250\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

としても求められる。

(3) 重力は変位と反対の下向きに働くため、

$$\begin{aligned} W_g &= -mgs \\ &= -(500\,\mathrm{N})(4.0\,\mathrm{m}) \\ &= -2000\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

合力がした仕事は、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{net}} &= W_F + W_g \\ &= 2000\,\mathrm{J} - 2000\,\mathrm{J} \\ &= 0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、仕事と運動エネルギーの関係から、

$$\Delta K = W_{\mathrm{net}} = 0\,\mathrm{J}$$

となる。

(4) 持上げ力は正の仕事をし、重力は同じ大きさの負の仕事をする。そのため合力の仕事はゼロになるが、持上げ力の仕事までゼロになるわけではない。

この場合、持上げ力によって物体と地球の系の重力による位置エネルギーが増加している。実際、

$$\begin{aligned} \Delta U_g &= mg(4.0\,\mathrm{m}) \\ &= (500\,\mathrm{N})(4.0\,\mathrm{m}) \\ &= 2000\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

であり、

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U_g = 0\,\mathrm{J} + 2000\,\mathrm{J} = 2000\,\mathrm{J}$$

となる。

これは持上げ力のした正の仕事と一致する。

6. どの力の仕事率を求めているか

等速で移動する物体について、仕事率には区別すべきものがある。

注目する対象	仕事率の意味
駆動力	物体を進行方向へ動かす力がする仕事の割合
抵抗力	進行方向と逆向きの力がする仕事の割合
合力	物体に働くすべての力がした仕事の合計を、時間で割った割合

水平な床上で、一定の抵抗力を受けながら物体が等速で進むなら、駆動力と抵抗力の大きさは等しい。

力と進行方向が一直線上で、両方の力が一定であれば、

$$P_{\text{drive}} = Fv$$

$$P_{\text{resist}} = -fv$$

である。

等速運動では $F = f$ なので、

$$P_{\text{net}} = P_{\text{drive}} + P_{\text{resist}} = 0$$

となる。

ここでゼロになるのは合力の仕事率であって、駆動力の仕事率ではない。

仕事率の問題で最初に確かめること

仕事率を求めるときは、次の三つを確かめる。

1. **どの力、どの装置の仕事率か。** 合力と個々の力を混同しない。
2. **力と物体の移動方向はどうなっているか。** 正の仕事か負の仕事かを判断する。
3. **どの時間区間か。** 時間を秒に直し、速さが一定という条件の有無を確認する。

仕事の単位 J と仕事率の単位 W も区別する。

演習問題

1

質量 1.0 kg の物体が、高さ 3.0 m の地点 A から静かに運動を始め、高さ 0 m の地点 B に達した。

運動中、重力以外に物体へ働く抵抗力がした仕事の合計は −12 J である。物体と地球を系とし、B の高さを重力による位置エネルギーの基準とする。ばねはなく、物体は B へ到達するものとする。

重力加速度の大きさは $10\,\text{m/s}^2$ とする。

(1) A での力学的エネルギーを求めよ。

(2) B での力学的エネルギーと速さを求めよ。

(3) 抵抗力が働かなかった場合の B での速さを求め、(2) と比較せよ。

(4) この運動で失われた力学的エネルギーの量を求め、「エネルギーが消滅した」と言ってよいか説明せよ。

2

水平な一直線上を進む車両が、一定の大きさ 300 N の抵抗力を受けながら、速さ 2.0 m/s で等速運動をしている。

駆動力は進行方向、抵抗力は反対方向に働き、どちらの力も一定である。上下方向の力はつり合い、車両の移動は水平である。

(1) 駆動力の大きさを求めよ。

(2) 駆動力、抵抗力、合力の仕事率をそれぞれ求めよ。

(3) この状態で 10 s 進んだときの移動距離と、駆動力がした仕事を求めよ。

(4) 抵抗力が同じ 300 N のまま、速さ 3.0 m/s で等速運動するとき、駆動力の仕事率を求めよ。

(5) (2) で合力の仕事率がゼロなのに、駆動力の仕事率が正になる理由を説明せよ。

3

ある装置は、実際に外部へ仕事をする仕事率が一定で 2.0 kW である。この装置が 3 分間、正の仕事を続けた。

(1) 仕事率を W、時間を s に直せ。

(2) この 3 分間に装置がした仕事を、J と kJ の両方で求めよ。

(3) 別の装置が、一定の実仕事率 500 W で同じ量の正の仕事をするとき、必要な時間を秒と分で求めよ。

(4) 二つの装置がした仕事の量と仕事率を区別して比較せよ。

©ミライコーチング

4

水平な静止床上で、質量 1.0 kg の物体が、質量を無視できるばねに接続されている。ばねの一端は固定され、ばね定数は 200 N/m である。ばねは扱う範囲でフックの法則に従い、物体は水平方向にのみ動く。

自然長の位置を $x = 0$ とし、ばねの伸びを正、縮みを負とする。物体を $x_A = -0.10\,\mathrm{m}$ まで押し縮め、初速ゼロで静かに放す。床から受ける最大静止摩擦力は 20 N 未満とする。

物体は自然長の位置 B まで右向きに滑る。床から受ける抵抗力は、この滑っている区間で常に左向き 3.6 N であり、抵抗力以外に、ばねの力、重力、垂直抗力が働く。重力と垂直抗力の仕事はゼロである。

物体と地球とばねを系とし、重力による位置エネルギーの基準を床の高さ $h = 0$、弾性エネルギーの基準を自然長 $x = 0$ とする。物体が自然長まで到達できることも、エネルギーから確認する。

(1) A での弾性エネルギーと力学的エネルギーを求めよ。

(2) A から B までの抵抗力の仕事を求めよ。

(3) B での弾性エネルギーと運動エネルギーを求めよ。

(4) B での速さを求めよ。

(5) 失われた力学的エネルギーの量を求めよ。

(6) 放した直後に物体が右向きに動き始めることと、途中で停止せず B に到達できることを説明せよ。

5

水平な静止床上を、ある物体が右向きに滑っている。床の高さを重力による位置エネルギーの基準とし、物体と地球を系とする。

始状態 A での力学的エネルギーは 12 J である。その後、状態 B に至るまでに、右向きの外力が 30 J の仕事をし、左向きの動摩擦力が -8.0 J の仕事をした。重力と垂直抗力の仕事はそれぞれゼロである。ばねはない。

(1) A から B への力学的エネルギーの変化を求めよ。

(2) B での力学的エネルギーを求めよ。

(3) 摩擦によって失われた力学的エネルギーの量を求めよ。

(4) 「摩擦力が働く運動では、力学的エネルギーは必ず減少する」という説明が正しくない理由を、この運動を例に説明せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) A では初速ゼロなので、運動エネルギーは 0 J である。B を高さの基準とすると、A での重力による位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_{gA} &= mgh_A \\ &= (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(3.0\,\mathrm{m}) \\ &= 30\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$E_A = K_A + U_{gA} = 0\,\mathrm{J} + 30\,\mathrm{J} = 30\,\mathrm{J}$$

となる。

答え：30 J

(2) 重力による位置エネルギーは E に含めている。重力以外の抵抗力がした仕事は -12 J なので、

$$\begin{aligned} E_B - E_A &= W_{\mathrm{other}} \\ E_B &= 30\,\mathrm{J} - 12\,\mathrm{J} \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

B の高さは基準の 0 m であるため、B での重力による位置エネルギーはゼロである。したがって、

$$K_B = 18\,\mathrm{J}$$

である。

$$\begin{aligned} v_B^2 &= \frac{2K_B}{m} \\ &= \frac{2(18\,\mathrm{J})}{1.0\,\mathrm{kg}} \\ &= 36\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

より、

$$v_B = 6.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。

答え：$E_B = 18\,\mathrm{J}$、$v_B = 6.0\,\mathrm{m/s}$

(3) 抵抗力がなければ、重力以外の力の仕事がゼロなので、力学的エネルギーは保存される。

その場合、B での運動エネルギーは 30 J であるため、

$$\begin{aligned} v_B^2 &= \frac{2(30\,\mathrm{J})}{1.0\,\mathrm{kg}} \\ &= 60\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

となる。

したがって、抵抗がない場合の速さは、

$$v_B = \sqrt{60}\,\mathrm{m/s}$$

である。

抵抗が働いた場合の 6.0 m/s より大きい。

答え：$\sqrt{60}\,\mathrm{m/s}$。**抵抗が働く場合より大きい**。

(4) 失われた力学的エネルギーの量は、

$$\begin{aligned} L &= E_A - E_B \\ &= 30\,\mathrm{J} - 18\,\mathrm{J} \\ &= 12\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

減ったのは力学的エネルギーであり、全エネルギーが消滅したわけではない。抵抗力によって、力学的エネルギーの一部が物体や周囲の内部エネルギーなど、別の形のエネルギーへ移る。

答え：12 J。**全エネルギーが消滅したとは言えない**。

2

(1) 等速運動なので加速度はゼロである。

水平方向の合力がゼロとなるため、駆動力の大きさは抵抗力と等しい。

答え：300 N

(2) 駆動力は進行方向と同じであり、力と速さは一定なので、

$$\begin{aligned} P_{\text{drive}} &= Fv \\ &= (300\,\text{N})(2.0\,\text{m/s}) \\ &= 600\,\text{W} \end{aligned}$$

である。

抵抗力は進行方向と反対向きなので、

$$\begin{aligned} P_{\text{resist}} &= -fv \\ &= -(300\,\text{N})(2.0\,\text{m/s}) \\ &= -600\,\text{W} \end{aligned}$$

である。

合力の仕事率は、

$$\begin{aligned} P_{\text{net}} &= P_{\text{drive}} + P_{\text{resist}} \\ &= 600\,\text{W} - 600\,\text{W} \\ &= 0\,\text{W} \end{aligned}$$

となる。

答え：駆動力 600 W**、抵抗力** −600 W**、合力** 0 W

(3) 移動距離は、

$$\begin{aligned} s &= v\Delta t \\ &= (2.0\,\text{m/s})(10\,\text{s}) \\ &= 20\,\text{m} \end{aligned}$$

である。

駆動力がした仕事は、

$$\begin{aligned} W_{\text{drive}} &= Fs \\ &= (300\,\text{N})(20\,\text{m}) \\ &= 6000\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

仕事率から求めても、

$$W_{\text{drive}} = (600\,\text{W})(10\,\text{s}) = 6000\,\text{J}$$

で一致する。

答え：移動距離 20 m**、駆動力の仕事** 6000 J

(4) 抵抗力が一定で、速さ 3.0 m/s の等速運動をしているため、駆動力も 300 N である。

したがって、

$$\begin{aligned} P_{\text{drive}} &= Fv \\ &= (300\,\text{N})(3.0\,\text{m/s}) \\ &= 900\,\text{W} \end{aligned}$$

となる。

答え：900 W

(5) 駆動力は進行方向に正の仕事をし、抵抗力は同じ大きさの負の仕事をする。

二つの仕事が打ち消し合うため、合力の仕事率はゼロとなる。しかし、駆動力は実際に正の仕事をしているため、その仕事率は正である。

答え：駆動力の正の仕事と抵抗力の負の仕事が打ち消し合うため、合力の仕事率だけがゼロになる。

3

(1) 1 kW = 1000 W なので、

$$2.0\,\text{kW} = 2000\,\text{W}$$

である。

また、

$$3\,\text{min} = 180\,\text{s}$$

となる。

答え：2000 W**、**180 s

(2) 平均仕事率の式を変形すると、

$$W = \bar{P}\Delta t$$

である。

仕事率は一定なので、

$$\begin{aligned} W &= (2000\,\text{W})(180\,\text{s}) \\ &= 360000\,\text{J} \\ &= 360\,\text{kJ} \end{aligned}$$

となる。

答え：$360000\,\mathrm{J} = 360\,\mathrm{kJ}$

(3) 別の装置が同じ仕事をするとき、時間は、

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{W}{\bar{P}} \\ &= \frac{360000\,\mathrm{J}}{500\,\mathrm{W}} \\ &= 720\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

である。

分に直すと、

$$720\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{min}$$

となる。

答え：$720\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{min}$

(4) どちらの装置がした仕事も 360000 J で同じである。

しかし、仕事率は一方が 2000 W、もう一方が 500 W である。

前者は後者の 4 倍の仕事率であるため、同じ仕事を 4 分の 1 の時間で行うことができる。

答え：仕事量は同じ 360000 J **であるが、**2000 W **の装置は** 500 W **の装置の 4 倍の仕事率をもち、必要な時間は 4 分の 1 になる。**

4

(1) A では物体の速さはゼロなので、

$$K_A = 0\,\mathrm{J}$$

である。

ばねの弾性エネルギーは、

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

で求められる。

したがって、

$$\begin{aligned}U_{sA} &= \frac{1}{2}(200\,\mathrm{N/m})(-0.10\,\mathrm{m})^2 \\ &= 1.0\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

床の高さを重力による位置エネルギーの基準としており、$U_{gA} = 0\,\mathrm{J}$ であるため、

$$\begin{aligned}E_A &= K_A + U_{gA} + U_{sA} \\ &= 0\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} + 1.0\,\mathrm{J} \\ &= 1.0\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

である。

答え：弾性エネルギー 1.0 J**、力学的エネルギー** 1.0 J

(2) A から B への変位の大きさは、

$$s = 0.10\,\mathrm{m}$$

である。

抵抗力は変位と反対向きに働くため、

$$\begin{aligned} W_f &= -fs \\ &= -(3.6\,\mathrm{N})(0.10\,\mathrm{m}) \\ &= -0.36\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

答え：$-0.36\,\mathrm{J}$

(3) B はばねが自然長になる位置である。

自然長からの変形量は $x_B = 0\,\mathrm{m}$ なので、

$$\begin{aligned} U_{sB} &= \frac{1}{2}(200\,\mathrm{N/m})(0\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

ばねの力は弾性エネルギーとして取り込んでいるため、それ以外の力の仕事には重ねて加えない。

この運動では、抵抗力の仕事だけが力学的エネルギーを変化させるので、

$$\begin{aligned} E_B - E_A &= W_f \\ E_B &= 1.0\,\mathrm{J} - 0.36\,\mathrm{J} \\ &= 0.64\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

B では、重力による位置エネルギーも弾性エネルギーもゼロであるため、

$$K_B = 0.64\,\mathrm{J}$$

となる。

答え：弾性エネルギー $0\,\mathrm{J}$**、運動エネルギー** $0.64\,\mathrm{J}$

(4) 運動エネルギーの式から、

$$\begin{aligned} v_B^2 &= \frac{2K_B}{m} \\ &= \frac{2(0.64\,\mathrm{J})}{1.0\,\mathrm{kg}} \\ &= 1.28\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$v_B = \sqrt{1.28}\,\mathrm{m/s}$$

である。

答え： $\sqrt{1.28}\,\mathrm{m/s}$**（約** $1.13\,\mathrm{m/s}$**）**

(5) 失われた力学的エネルギーの量は、

$$\begin{aligned} L &= E_A - E_B \\ &= 1.0\,\mathrm{J} - 0.64\,\mathrm{J} \\ &= 0.36\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

抵抗力の仕事は $-0.36\,\mathrm{J}$ であるが、失われた量は正の $0.36\,\mathrm{J}$ とする。

答え：0.36 J

(6) 放した直後、ばねが物体を右向きに押す力の大きさは、

$$\begin{aligned} F_s &= k \mid x_A \mid \\ &= (200\,\mathrm{N/m})(0.10\,\mathrm{m}) \\ &= 20\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

この力は最大静止摩擦力より大きいため、物体は右向きに動き始める。動き始めた直後も、右向きのばねの力は左向きの抵抗力 3.6 N より大きい。

さらに、途中で停止しないことを確認する。A から右向きに進んだ距離を s とし、$0 < s \leq 0.10\,\mathrm{m}$ の範囲を考える。

このときばねの変形量は、

$$x = -0.10\,\mathrm{m} + s$$

である。

運動エネルギーは、A からその位置までの弾性エネルギーの減少量から抵抗力の仕事による損失を引いたものである。

$$\begin{aligned} K(s) = \frac{1}{2}(200\,\mathrm{N/m})\{(0.10\,\mathrm{m})^2 - (-0.10\,\mathrm{m} + s)^2\} \\ -(3.6\,\mathrm{N})s \end{aligned}$$

整理すると、

$$K(s) = (16.4\,\mathrm{N})s - (100\,\mathrm{N/m})s^2$$

となる。

ここで $s \leq 0.10\,\mathrm{m}$ より、

$$(100\,\mathrm{N/m})s \leq 10\,\mathrm{N}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} K(s) &= \{16.4\,\mathrm{N} - (100\,\mathrm{N/m})s\}s \\ &\geq (16.4\,\mathrm{N} - 10\,\mathrm{N})s \\ &= (6.4\,\mathrm{N})s > 0 \end{aligned}$$

となる。

よって、動き始めた後、自然長の位置 B に到達するまで運動エネルギーは正であり、途中で停止しない。

なお、ばねの力は自然長へ近づくほど小さくなるため、移動中ずっと右向きに加速するわけではない。

答え：放したときの右向きのばねの力 20 N が最大静止摩擦力より大きいので動き始める。また、A から B までの途中では運動エネルギーが正であるため、停止せず B に到達できる。

5

(1) 重力と垂直抗力の仕事はゼロであるため、力学的エネルギーの変化は、外力と動摩擦力の仕事の合計になる。

$$\begin{aligned}\Delta E &= W_{\text{other}} \\ &= 30\,\text{J} - 8.0\,\text{J} \\ &= 22\,\text{J}\end{aligned}$$

である。

答え：+22 J。**力学的エネルギーは増加する**。

(2) 始状態 A の力学的エネルギーに、外力と摩擦力がした仕事の合計を加える。

$$\begin{aligned}E_B &= E_A + \Delta E \\ &= 12\,\text{J} + 22\,\text{J} \\ &= 34\,\text{J}\end{aligned}$$

となる。

答え：34 J

(3) 摩擦力がした仕事は −8.0 J である。

したがって、摩擦によって失われた力学的エネルギーの量は、

$$L = -W_f = 8.0\,\text{J}$$

である。

答え：8.0 J

(4) この運動では、摩擦力が −8.0 J の負の仕事をしている。

しかし、右向きの外力が 30 J の正の仕事をしたため、それらの合計は +22 J となり、力学的エネルギーは増加した。

したがって、摩擦力が働くという事実だけでは、力学的エネルギーが減少すると判断できない。重力などを位置エネルギーに取り込んだうえで、その他の力がした仕事の合計を調べる必要がある。

答え：摩擦力が負の仕事をしても、他の外力がそれを上回る正の仕事をすれば、力学的エネルギーは増加するため。