第 235 講 空間ベクトルの内積

学習目標

- 空間ベクトルの内積を成分から計算できる。
- 内積から 2 つの空間ベクトルのなす角を求められる。
- 内積を用いて、空間内の 2 つのベクトルが垂直かどうかを判定できる。
- 一方のベクトルへの正射影を求め、元のベクトルを平行な成分と垂直な成分に分けられる。

1. 3 方向の「向きのそろい方」を 1 つの数にする

空間でも内積は成分どうしの積の和である

平面の内積では、x 方向と y 方向の成分どうしを掛け、その和をとった。空間では独立な方向がもう 1 つ増えるので、z 方向の積も加える。各積は、その軸方向について 2 つのベクトルが同じ向きなら正、反対向きなら負になる。3 方向の寄与を合計した数が、空間ベクトルの内積である。

空間ベクトルの内積

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ の内積を

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

で定める。内積の結果はベクトルではなく実数である。また、$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\,\vec{a}\,|^2$ である。

計算の判断軸

対応する成分を縦にそろえ、x、y、z の順に「掛けてから足す」。成分を足してから掛けるのではない。

例題 1：成分から内積を求める

$\vec{a}=(2,-1,3)$、$\vec{b}=(-4,5,2)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $|\,\vec{a}\,|^2$ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

対応する成分どうしを掛けて足すと、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-4)+(-1)\cdot5+3\cdot2=-8-5+6=-7$$

である。また、同じベクトルどうしの内積をとればよいので、$|\,\vec{a}\,|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=2^2+(-1)^2+3^2=14$ である。

©ミライコーチング

2. 成分計算と空間の角度は同じ内積を表す

なす角による内積

零ベクトルでない $\vec{a}$、$\vec{b}$ のなす角を $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ とすると、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\theta$$

が成り立つ。したがって、

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}$$

である。この式は暗記だけに頼らず確かめられる。成分で $|\,\vec{a}-\vec{b}\,|^2$ を展開すると $|\,\vec{a}\,|^2 + |\,\vec{b}\,|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$ となる。一方、$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}-\vec{b}$ が作る三角形に余弦定理を使うと $|\,\vec{a}\,|^2 + |\,\vec{b}\,|^2 - 2\,|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\theta$ となる。両者を比べれば、成分の式と角度の式が同じ量を表すと分かる。座標軸の取り方を変えても、2 つのベクトルの大きさとなす角は変わらないため、内積は空間内の図形的な関係を表す量になる。

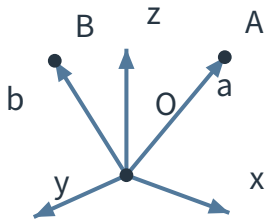

図 1　空間内の 2 つのベクトル a=(2,1,2)、b=(1,2,2)

内積の符号だけでも角の種類が分かる

$|\,\vec{a}\,|$ と $|\,\vec{b}\,|$ は正だから、内積の符号は $\cos\theta$ の符号と一致する。よって $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ なら $0^\circ \le \theta < 90^\circ$、$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ なら $\theta = 90^\circ$、$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ なら $90^\circ < \theta \le 180^\circ$ である。とくに $\theta = 0^\circ$ を除けば、正の内積は鋭角を表す。角度そのものを求める前に、符号で答えの範囲を確かめられる。

例題 2：空間ベクトルのなす角

$\vec{a} = (2,1,2)$、$\vec{b} = (1,2,2)$ のなす角を θ とする。$\cos\theta$ を求め、θ が鋭角、直角、鈍角のいずれかを答えよ。

例題 2 の解答・解説

内積と大きさは

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot1 + 1\cdot2 + 2\cdot2 = 8, \qquad |\,\vec{a}\,| = |\,\vec{b}\,| = 3$$

である。したがって、$\cos\theta = \frac{8}{3\cdot3} = \frac{8}{9}$ である。内積が正なので、θ は鋭角である。図の見かけではなく、3 成分を使った内積で判断することが大切である。

3. 垂直条件は内積が 0 である

空間ベクトルの垂直条件

零ベクトルでない 2 つの空間ベクトルについて、

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

である。直角なら $\cos 90^\circ = 0$ であり、逆に内積が 0 ならなす角の余弦が 0 になるからである。これは図で直角らしく見えるかどうかに頼らない判定法である。

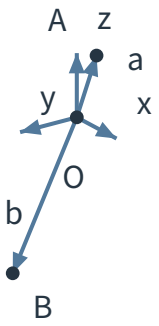

図 2　内積が 0 になる空間ベクトル a=(2,1,2)、b=(1,2,-2)

例題 3：垂直になる成分を決める

$\vec{a} = (2, -1, 3)$、$\vec{b} = (1, k, -1)$ が垂直になるように、実数 k の値を定めよ。

例題 3 の解答・解説

垂直条件より $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ である。したがって、

$$2 \cdot 1 + (-1)k + 3 \cdot (-1) = 0$$

となる。左辺を整理すると $-k - 1 = 0$ だから、$k = -1$ である。実際、$\vec{b} = (1, -1, -1)$ とすると内積は $2 + 1 - 3 = 0$ になる。

4. 内積は一方の向きへの正射影を取り出す

影の長さから平行な成分を作る

$\vec{a} \neq \vec{0}$、$\vec{b} \neq \vec{0}$ とする。$\vec{a}$ を $\vec{b}$ の向きへ正射影した符号付きの長さは、$\vec{a}$ の長さに $\cos\theta$ を掛けた

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{b}\,|}$$

である。さらに $\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトル $\frac{\vec{b}}{|\,\vec{b}\,|}$ を掛けると、正射影ベクトル

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{b}\,|^2}\vec{b}$$

を得る。分母が $|\,\vec{b}\,|^2$ になるのは、長さを取り出すためと単位ベクトルを作るために $|\,\vec{b}\,|$ で 2 回割るからである。

©ミライコーチング

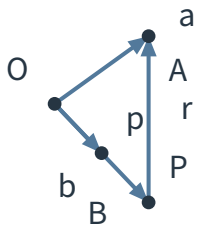

図 3　a=(4,2,3)を b=(2,1,0)に平行な成分と垂直な成分に分ける

例題 4：正射影と垂直な成分

$\vec{a}=(4,2,3)$、$\vec{b}=(2,1,0)$ とする。$\vec{a}$ の $\vec{b}$ への正射影ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。また、$\vec{r}=\vec{a}-\vec{p}$ とおくとき、$\vec{r}\perp\vec{b}$ を確かめよ。

例題 4 の解答・解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot2+2\cdot1+3\cdot0=10$、$|\,\vec{b}\,|^2=2^2+1^2=5$ だから、

$$\vec{p}=\frac{10}{5}\vec{b}=2\vec{b}=(4,2,0)$$

である。したがって、$\vec{r}=\vec{a}-\vec{p}=(0,0,3)$ である。ここで $\vec{r}\cdot\vec{b}=0\cdot2+0\cdot1+3\cdot0=0$ だから、$\vec{r}\perp\vec{b}$ である。これにより、$\vec{a}=\vec{p}+\vec{r}$ と平行な成分と垂直な成分に分解できた。

5. 演習

演習 1：内積の計算

$\vec{a}=(-2,3,1)$、$\vec{b}=(4,-1,5)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

演習 2：角の種類

$\vec{a}=(1,-2,2)$、$\vec{b}=(2,1,-3)$ のなす角は、鋭角、直角、鈍角のいずれか。内積を計算して答えよ。

演習 3：なす角

$\vec{a}=(1,1,0)$、$\vec{b}=(1,0,1)$ のなす角を θ とする。$\cos\theta$ と θ を求めよ。

演習 4：垂直条件

$\vec{a}=(m,2,-1)$、$\vec{b}=(3,-1,4)$ が垂直になるように、実数 m の値を定めよ。

©ミライコーチング

演習 5：2 点を結ぶベクトルの内積

$A(1,-1,2)$、$B(3,0,-1)$、$C(-1,3,1)$ とする。$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求め、角 BAC が鋭角、直角、鈍角のいずれかを答えよ。

演習 6：正射影と分解

$\vec{a}=(3,3,1)$、$\vec{b}=(1,1,0)$ とする。$\vec{a}$ の $\vec{b}$ への正射影ベクトル $\vec{p}$ と、$\vec{a}-\vec{p}$ を求めよ。

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

対応する成分どうしを掛けて足すと、$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\cdot 4+3\cdot(-1)+1\cdot 5=-8-3+5=-6$ である。

演習 2 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 2+(-2)\cdot 1+2\cdot(-3)=2-2-6=-6$$

である。内積が負なので $\cos\theta<0$ であり、なす角は鈍角である。

演習 3 の解答・解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$、$|\,\vec{a}\,|=|\,\vec{b}\,|=\sqrt{2}$ だから、

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

である。$0^\circ\le\theta\le 180^\circ$ より、$\theta=60^\circ$ である。

演習 4 の解答・解説

垂直条件より、$3m+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 4=0$ である。よって $3m-6=0$ となり、$m=2$ である。

演習 5 の解答・解説

$$\overrightarrow{AB}=(2,1,-3),\qquad \overrightarrow{AC}=(-2,4,-1)$$

である。したがって、

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(-2)+1\cdot 4+(-3)\cdot(-1)=3$$

である。2 つのベクトルは零ベクトルではなく、内積が正なので角 BAC は鋭角である。

演習 6 の解答・解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$、$|\,\vec{b}\,|^2=2$ だから、

$$\vec{p}=\frac{6}{2}\vec{b}=3\vec{b}=(3,3,0)$$

である。したがって、$\vec{a}-\vec{p}=(0,0,1)$ である。確認すると $(0,0,1)\cdot(1,1,0)=0$ であり、この残りは $\vec{b}$ に垂直である。