第 045 講 万有引力と重力

この講でできるようになること

- 万有引力がどの物体に、どの向きに働くかを説明し、大きさを計算できる。
- 万有引力の大きさと、質量・中心間距離の関係を使って変化を判断できる。
- 重力の大きさと重力加速度を区別し、天体の質量・半径から計算できる。
- 天体の中心からの距離と地表からの高度を区別し、高度による重力加速度の変化を説明できる。

1. 万有引力は物体どうしが引き合う力

地球上で手を離した物体は、地面に向かって落下する。これは、地球が物体を引く重力によるものである。

しかし、物体を引くのは地球だけではない。地球と月、太陽と地球、さらには身近な二つの物体の間にも、互いに引き合う力が働いている。

このように、質量を持つ物体どうしに働く引力を**万有引力**という。

1.1 引く側と引かれる側を区別する

質量を持つ二つの物体 A、B を考える。A は B を引き、同時に B も A を引いている。

この二つの力には、次の特徴がある。

- A が B から受ける力は、B の方向を向く。
- B が A から受ける力は、A の方向を向く。
- 二つの力の大きさは等しく、向きは反対である。
- 二つの力は、それぞれ別の物体に働く。

重要なのは、**力を受ける物体を先に決めること**である。

A に働く万有引力と B に働く万有引力は、作用と反作用の関係にある。大きさが等しく向きが反対でも、一つの物体に働く二つの力ではないため、A または B の力のつり合いとして相殺してはならない。

A と B をまとめて一つの系として扱う場合、二つの力は系の内部で働く力となる。ただし、本講では一つずつ物体を取り出し、それぞれが受ける力を調べる。

1.2 中心間距離とは何か

万有引力の大きさを計算するときは、二つの物体の距離を正しく決める必要がある。

物体を一点に質量が集まったものとして扱う近似を**質点近似**という。質点どうしであれば、距離は二つの質点の位置の間隔である。

大きさのある球形の天体を扱うときには、後で説明する球対称の条件のもとで、天体の中心から対象物体までの距離を用いる。

この距離を r と表す。

r は物体の表面どうしのすき間ではなく、中心間の距離である。

1.3 万有引力の法則

質量 M の物体と質量 m の物体が、中心間距離 r だけ離れているとする。

二つの物体の間に働く万有引力の大きさ F は、次の式で表される。

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

ここで、各記号の意味は次のとおりである。

記号	意味	単位
F	万有引力の大きさ	N
M	一方の物体の質量	kg
m	もう一方の物体の質量	kg
r	二つの物体の中心間距離	m
G	万有引力定数	$\mathrm{N\,m^2/kg^2}$

G は万有引力定数と呼ばれ、ここでは次の値を用いる。

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$$

G は万有引力の法則に共通する定数であり、地球上と別の天体の近くで異なる値に置き換えるものではない。

式の右辺は、二つの質量の積 Mm に比例し、中心間距離の二乗 r^2 に反比例する。

なお、この式が与えるのは**力の大きさ**である。力の向きは、二つの物体の中心を結ぶ直線に沿って、互いに相手を引く向きとなる。

正の質量を持つ通常の物体どうしについて、この万有引力を斥力として扱うことはない。



図 1　質点 A と B の中心間距離は 0.20m。FA と FB は別々の物体が受ける等大逆向きの万有引力。約 1.00×10^−8N の大きさを矢印 100 描画単位で表す。円の大きさは模式的。

図の F_A は A が B から受ける力、F_B は B が A から受ける力である。矢印はそれぞれの物体から相手に向かっている。

二つの矢印は等長であり、この図では、それぞれ 100 描画単位の長さが約 $1.00 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$ の力の大きさに対応している。描かれた円の大きさは、物体の実際の半径や密度を表していない。

例題 1

図の質点 A、B の質量は、それぞれ 2.0 kg、3.0 kg であり、中心間距離は 0.20 m である。

二つの質点間に働く万有引力以外の力を考えないものとして、次の問いに答えよ。

(1) A が B から受ける万有引力の大きさを求めよ。

(2) B が A から受ける万有引力の大きさと向きを答えよ。

(3) 万有引力によって生じる A、B それぞれの加速度の大きさを求めよ。

解答・解説

(1) 万有引力の大きさ

二つの物体の質量と中心間距離を万有引力の式に代入する。

$$
\begin{aligned}
F &= G\frac{Mm}{r^2} \\
&= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2})(2.0\,\mathrm{kg})(3.0\,\mathrm{kg})}{(0.20\,\mathrm{m})^2} \\
&= 1.0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

したがって、A が受ける力の大きさは

$$F_A \approx 1.00 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$$

である。

$1.0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$ は与えた数値からの計算値であり、$1.00 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$ はそれを丸めた概算値である。

(2) 反作用の大きさと向き

作用と反作用の大きさは等しいので、

$$F_B = 1.0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$$

となる。

B が受ける力は A の方向、すなわち図の左向きである。A が受ける力は右向きなので、二つの力は逆向きである。

(3) 二つの物体の加速度

A と B に働く力の大きさは等しいが、質量は異なる。

運動方程式を使うと、A の加速度の大きさ a_A は

$$\begin{aligned} a_A &= \frac{F_A}{m_A} \\ &= \frac{1.0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}} \\ &= 5.0025 \times 10^{-9}\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

同様に、B の加速度の大きさ a_B は

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{F_B}{m_B} \\ &= \frac{1.0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}}{3.0\,\mathrm{kg}} \\ &= 3.335 \times 10^{-9}\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

A の加速度は右向き、B の加速度は左向きである。

これらは質点間の万有引力のみを考えたときの、その瞬間の加速度である。

等大逆向きの力が働いても、質量が異なれば加速度の大きさは異なる。 同じ大きさの力を受けた場合、質量が小さい物体ほど加速度の大きさが大きくなる。

2. 球形の天体の外でも同じ法則を使える

万有引力の法則は、質点だけを扱うものではない。

天体の質量が中心からの方向によらず同じように分布している状態を、ここでは**球対称**という。球対称な天体の外部では、天体の全質量が中心に集まっているものとして、万有引力の大きさを計算できる。

天体の質量を M、半径を R、対象物体の質量を m とする。

対象物体を質点として近似し、天体の中心から対象物体までの距離を r とすれば、天体の表面または外部、すなわち $r \geq R$ の範囲で

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

を用いることができる。

ここで必要なのは天体の質量分布が球対称であることであり、内部の密度がどの場所でも同じであるという追加条件は必要ない。

ただし、**天体の内部に対して、外部用の式をそのまま延長してはならない。** また、球対称でない天体の重力を、この近似式だけで正確に計算できるとは限らない。

本講では、対象物体は天体に比べて十分小さいものとして質点近似し、他の天体からの引力や空気抵抗を無視する。

3. 万有引力から地表の重力を求める

3.1 重力は力、重力加速度は加速度

地球が物体を引く力は重力と呼ばれる。

本講では、地球などの球対称天体が物体を引く万有引力を、その天体による重力として扱う。ただし、天体の自転による遠心効果は無視する。

現実の地球は完全な球ではなく自転しているため、実際の重力加速度は緯度などによっても異なる。本講の式は、これらの影響を無視した近似モデルに対するものである。

重力の大きさ F は、物体の質量を m、重力加速度の大きさを g として

$$F = mg$$

と表される。

天体の中心からの距離が r の場所では、万有引力の法則より

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

である。

同じ力を表しているので、

$$mg = G\frac{Mm}{r^2}$$

となる。

$m > 0$ として両辺を m で割ると、

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

が得られる。

この式は、重力加速度の大きさが、天体の質量 M と中心からの距離 r によって決まることを示している。

重力と重力加速度の違い

- 重力の大きさ F は物体に働く**力**であり、単位は N である。
- 重力加速度の大きさ g は、単位質量当たりの重力の大きさに等しく、単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。
- 同じ場所では、試験物体の質量が変わっても g は変わらないが、$F = mg$ により重力の大きさは質量に比例する。

重力だけが物体に働く場合、運動方程式 $ma = F$ から、物体の加速度の大きさは $a = g$ となる。向きは天体の中心に向かう方向である。

一方、物体に重力以外の力も働く場合、物体の実際の加速度は合力から決まる。したがって、重力加速度 g と、その物体の実際の加速度を常に同一視してはならない。

©ミライコーチング

3.2 質量と重力を混同しない

例えば同じ場所に質量の異なる二つの物体があれば、それぞれの重力加速度は同じである。

しかし、物体に働く重力の大きさは同じではない。

質量を 2 倍にすると、

$$F' = 2mg = 2F$$

となり、重力の大きさは 2 倍になる。

重力加速度を求める式から試験物体の質量 m が消えるのは、$F = mg$ と万有引力の式を比較した結果である。

g が試験物体の質量に依存しないことと、重力 F が試験物体の質量に依存しないことは、まったく異なる。

また、質量の単位は kg であり、重力の大きさの単位は N である。

質量 50 kg の物体について、「重力は 50 kg である」とは表さない。

3.3 地表の重力加速度

天体の半径を R とする。

地表では、天体の中心から表面上の対象物体までの距離を R と近似するので、地表の重力加速度の大きさを g_0 とすれば、

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

となる。

天体の質量が大きいほど g_0 は大きくなり、天体の質量が同じなら、半径が大きいほど g_0 は小さくなる。

なお、重力加速度の単位は次のように確かめられる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} &= \frac{\mathrm{kg\,m/s^2}}{\mathrm{kg}} \\ &= \mathrm{m/s^2}\end{aligned}$$

この単位の対応からも、g は力そのものではなく、単位質量当たりの重力に対応する加速度の大きさであることが分かる。

例題 2

地球を、自転していない球対称な天体として近似する。

地球の質量と半径を、次の概算値とする。

$$M = 6.0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

$$R = 6.4 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$$

万有引力定数は $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$ とする。

(1) この地球モデルの地表における重力加速度の大きさを求めよ。

(2) 地表にある質量 $50\,\mathrm{kg}$ の物体に働く重力の大きさを求めよ。

(3) この物体の質量を 2 倍にすると、地表の重力加速度と物体に働く重力は、それぞれどうなるか。

解答・解説

(1) 地表の重力加速度

地表では $r = R$ なので、

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

を使う。

$$g_0 = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2})(6.0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg})}{(6.4 \times 10^{6}\,\mathrm{m})^2}$$

$$= 9.7705078125\,\mathrm{m/s^2}$$

したがって、概算値として

$$g_0 \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

(2) 物体に働く重力

物体の質量は $50\,\mathrm{kg}$ である。

重力の大きさは $F = mg_0$ より、

$$F = (50\,\mathrm{kg})(9.7705078125\,\mathrm{m/s^2})$$

$$= 488.525390625\,\mathrm{N}$$

$$\approx 4.9 \times 10^{2}\,\mathrm{N}$$

となる。

ここでは、(1)で得た計算途中の値を使って重力を求め、最後に丸めている。

(3) 物体の質量を 2 倍にした場合

天体の質量 M、半径 R は変わらないので、

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

の値は変化しない。

一方、物体の質量が 2 倍になれば、$F = mg_0$ より重力の大きさは 2 倍になる。

したがって、**重力加速度は変わらず、重力の大きさは 2 倍になる。**

4. 高度が変わると重力はどうなるか

4.1 高度と中心間距離は異なる

天体の表面から離れた場所を考える。

天体の半径を R、表面から対象物体までの高度を h とすると、中心間距離 r は

$$r = R + h$$

となる。

例えば高度が天体の半径と等しい場合、$h = R$ であるが、中心間距離は

$$r = R + R = 2R$$

である。

高度が $2R$ なら、

$$r = R + 2R = 3R$$

となる。

万有引力の式の r に直接代入するのは高度 h ではなく、中心間距離 $R + h$ である。

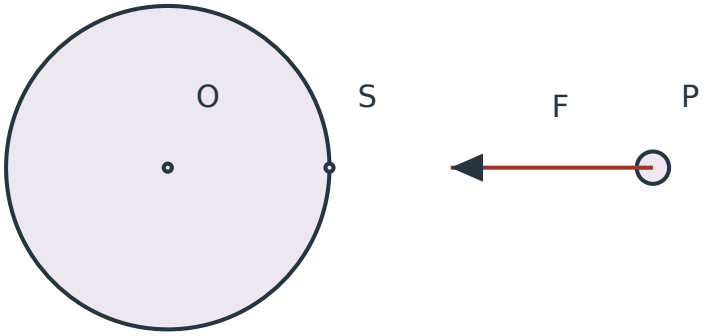

図 2　球対称天体の中心 O、球面上の S、質点 P。OS が半径 R、SP が高度 h=2R、OP が中心間距離 3R。P の重力 F は O 向き。矢印は方向を示す模式図で、図 1 と力の尺度を共有しない。

図の O は天体の中心、S は球面上の点、P は対象物体を質点として表した点である。O、S、P は同一直線上にあり、距離の比は

$$R : h : r = 1 : 2 : 3$$

となる。

図の天体は球を断面で表したものであり、球面を平らな地面として描いているわけではない。P の記号円の大きさも模式的であり、高度を求める際に差し引くものではない。

P に描かれた力は、天体が P を引く重力である。天体が P から受ける反作用も存在するが、この図は P に働く力に注目しているため省略している。

この図の矢印は力の方向を示すものであり、先ほどの質点 A、B の図とは矢印の長さと力の大きさの対応尺度を共有していない。

4.2 高度における重力加速度

天体の外部で高度が $h \geq 0$ の場所では、

$$g(h) = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

となる。

ここで、$g(h)$ は高度 h における重力加速度の大きさである。

一方、地表の重力加速度は

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

である。

この二つの式の比をとると、

$$\begin{aligned}\frac{g(h)}{g_0} &= \frac{G\frac{M}{(R+h)^2}}{G\frac{M}{R^2}} \\ &= \frac{R^2}{(R+h)^2} \\ &= \left(\frac{R}{R+h}\right)^2\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$g(h) = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

である。

この式を使えば、地表の重力加速度から高度の異なる場所の重力加速度を求められる。

天体の中心から遠ざかるほど、重力加速度は小さくなる。ただし、**高度が 2 倍になったからといって、中心間距離も 2 倍になるとは限らない**。

また、地表付近で高さの変化が天体の半径に比べて十分小さい場合には、$R+h$ が R とほぼ同じなので、g をほぼ一定として扱える。

高い場所まで移動する場合には、この近似を無条件に使うことはできない。

例題 3

例題 2 と同じ地球モデルを用いる。

$$M = 6.0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

$$R = 6.4 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$$

$$g_0 = 9.7705078125\,\mathrm{m/s^2}$$

地球を自転しない球対称天体とし、対象物体は質点として近似する。他の天体の影響と空気抵抗は考えない。

(1) 高度 $h = R$ の場所で、中心間距離と重力加速度の大きさを求めよ。

(2) 高度 $h = 2R$ の場所で、中心間距離と重力加速度の大きさを求めよ。

(3) 各高度にある質量 50 kg の物体に働く重力の大きさを求めよ。

解答・解説 (1) 高度が半径と等しい場合　$h = R$ なので、中心からの距離は次のようになる。

$$r = R + h = 2R$$

となる。

したがって、重力加速度は

$$\begin{aligned} g(R) &= g_0 \left(\frac{R}{2R} \right)^2 \\ &= \frac{g_0}{4} \\ &= \frac{9.7705078125\,\mathrm{m/s^2}}{4} \\ &= 2.442626953125\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

(2) 高度が半径の 2 倍の場合

$h = 2R$ より、

$$r = R + 2R = 3R$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} g(2R) &= g_0 \left(\frac{R}{3R} \right)^2 \\ &= \frac{g_0}{9} \\ &= \frac{9.7705078125\,\mathrm{m/s^2}}{9} \\ &\approx 1.0856119791666667\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

最後の小数表示は、割り算の結果を途中で区切った近似表示である。

(3) 各高度での重力

高度 $h = R$ では、

$$\begin{aligned} F_R &= mg(R) \\ &= (50\,\mathrm{kg})(2.442626953125\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 122.13134765625\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

高度 $h = 2R$ では、地表での重力の $\frac{1}{9}$ を使うと、

$$\begin{aligned} F_{2R} &= \frac{488.525390625\,\mathrm{N}}{9} \\ &\approx 54.2805989583333\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

概算すると、それぞれ

$$F_R \approx 1.2 \times 10^2\,\mathrm{N}$$

$$F_{2R} \approx 5.4 \times 10^1\,\mathrm{N}$$

である。

質量 $50\,\mathrm{kg}$ は変化していないが、天体の中心から遠ざかることで重力が小さくなっている。

また、高度 $2R$ の場所では地表の重力の $\frac{1}{9}$ になる。これは中心間距離が R から $3R$ に変わったためであり、高度そのものを万有引力の式の距離として使った結果ではない。

5. 万有引力の比例関係を使う

万有引力の式

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

から、力の大きさがどのように変化するかを比較できる。

ただし、比較するときは、**何を変え、何を同じに保つのか**を明確にする必要がある。

5.1 質量を変える場合

中心間距離 r と一方の質量 m を一定に保つと、F はもう一方の質量 M に比例する。

したがって、M が 2 倍なら、万有引力の大きさも 2 倍である。

二つの質量を両方 2 倍にすると、その積 Mm は 4 倍になる。

5.2 中心間距離を変える場合

二つの質量を一定に保つと、万有引力の大きさは r^2 に反比例する。

中心間距離を 2 倍にすると、

$$F' = \frac{F}{2^2} = \frac{F}{4}$$

となる。

中心間距離を 3 倍にすると、

$$F' = \frac{F}{3^2} = \frac{F}{9}$$

となる。

これを**逆二乗の関係**という。

変更する条件	ほかの条件	万有引力の大きさ
一方の質量を 2 倍	他方の質量と距離は一定	2 倍
両方の質量を 2 倍	距離は一定	4 倍
中心間距離を 2 倍	両方の質量は一定	$\frac{1}{4}$ 倍
中心間距離を 3 倍	両方の質量は一定	$\frac{1}{9}$ 倍

質量と距離を同時に変える場合は、それぞれの変化を組み合わせて考える。

例題 4

例題 1 の質点 A、B について、元の質量と中心間距離は

$$m_A = 2.0\,\mathrm{kg}$$
$$m_B = 3.0\,\mathrm{kg}$$
$$r = 0.20\,\mathrm{m}$$

であり、元の万有引力の大きさは

$$F = 1.0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$$

である。

次の変更後の万有引力の大きさを求めよ。各変更は元の状態から独立に行うものとする。

(1) 質量は変えず、中心間距離だけを 0.40 m にする。

(2) 両方の質量を 2 倍にし、中心間距離も 2 倍にする。

(3) 中心間距離は変えず、両方の質量だけを 2 倍にする。

解答・解説

(1) 距離だけを 2 倍にした場合

中心間距離は 0.20 m から 0.40 m となる。

二つの質量は変わらないので、

$$F' = F\left(\frac{0.20\,\mathrm{m}}{0.40\,\mathrm{m}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}F$$
$$= 2.50125 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}$$

となる。

(2) 両方の質量と距離を 2 倍にした場合

質量の積は 4 倍になる。一方、距離の二乗も 4 倍になる。

したがって、

$$\frac{F'}{F} = \frac{2 \times 2}{2^2} = 1$$

である。

つまり、

$$F' = 1.0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$$

となり、元の万有引力と同じ大きさである。

(3) 両方の質量だけを 2 倍にした場合

中心間距離は変わらないため、分母の r^2 は変化しない。

$$\begin{aligned} F' &= 4F \\ &= 4\bigl(1.0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}\bigr) \\ &= 4.002 \times 10^{-8}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

(2)と(3)では、両方の質量を 2 倍にする点は同じである。しかし、距離の条件が異なるため結果も異なる。

比例関係を使うときは、変化させた条件をすべて確認することが重要である。

6. 天体が異なる場合の重力加速度

球対称な天体の表面では、

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

である。

この式から、天体の質量だけでなく半径も重力加速度を決めることが分かる。

例えば天体の質量を $\frac{1}{4}$ にしても、半径も $\frac{1}{2}$ になるなら、分母の半径の二乗は $\frac{1}{4}$ になる。この場合、表面の重力加速度は変わらない。

逆に、質量が同じでも半径が 2 倍なら、表面の重力加速度は $\frac{1}{4}$ になる。

ここで、天体の密度が一定であるといった追加条件を勝手に置いてはならない。比較する天体について与えられた質量と半径を、そのまま使う。

さらに、表面の重力加速度と半径が分かっている場合には、

$$M = \frac{g_0 R^2}{G}$$

と式を変形することで、天体の質量を求められる。

このように万有引力の法則は、物体に働く重力を求めるだけでなく、天体の質量を調べるためにも使うことができる。

演習問題

演習 1

質量 4.0 kg の質点 A と、質量 6.0 kg の質点 B が、互いに万有引力を及ぼし合っている。

二つの質点間の万有引力以外の力は考えないものとする。

演習 1(1) A が B から受ける力と、B が A から受ける力について、大きさと向きの関係を答えよ。

演習 1(2) A が受ける力と B が受ける力が、互いに打ち消し合って二つの質点が加速しない、という説明が誤りである理由を述べよ。

演習 1(3) A と B が受ける万有引力の大きさが等しいとき、それぞれの加速度の大きさの比 $a_A : a_B$ を求めよ。

対応解説：巻末の「演習 1 の解答・解説」

演習 2

質量 M と m の二つの質点が、中心間距離 r だけ離れている。元の万有引力の大きさを F とする。

各小問では、元の状態から指定された条件だけを変更する。

演習 2(1) 質量 M だけを 2 倍にしたとき、万有引力の大きさは元の何倍になるか。

演習 2(2) 二つの質量を変えず、中心間距離を 3 倍にしたとき、万有引力の大きさは元の何倍になるか。

演習 2(3) 両方の質量を 2 倍にし、中心間距離を 3 倍にしたとき、万有引力の大きさは元の何倍になるか。

演習 2(4) 「物体の表面間のすき間が 2 倍になれば、万有引力は必ず $\frac{1}{4}$ になる」という説明が、一般には正しくない理由を述べよ。

対応解説：巻末の「演習 2 の解答・解説」

©ミライコーチング

演習 3

地球を自転しない球対称な天体として近似し、その質量を M、半径を R、地表の重力加速度の大きさを g_0 とする。

別の球対称天体 A、B を考える。天体 A の質量は地球モデルの $\frac{1}{4}$、半径は $\frac{1}{2}$ である。天体 B の質量は地球モデルと同じで、半径は 2 倍である。

それぞれの天体の表面で、万有引力による重力加速度を考える。自転や他の天体の影響は無視する。

演習 3(1) 天体 A の表面の重力加速度の大きさは、地球モデルの何倍か。

演習 3(2) 天体 B の表面の重力加速度の大きさは、地球モデルの何倍か。

演習 3(3) 天体の質量だけを比べて表面の重力加速度の大小を決められない理由を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 3 の解答・解説」

演習 4

ある球対称天体の表面で、重力加速度の大きさが

$$g_0 = 10\,\mathrm{m/s^2}$$

であるとする。

これは本問だけの設定であり、本文の地球モデルの計算値とは別の条件である。

同じ場所に質量 $2\,\mathrm{kg}$ の物体 A と、質量 $5\,\mathrm{kg}$ の物体 B を置く。天体の自転や他の天体の影響は無視する。

演習 4(1) A と B に働く重力の大きさをそれぞれ求めよ。

演習 4(2) 重力だけが働く場合、A と B それぞれの加速度の大きさを求めよ。

演習 4(3) 「質量の大きい B は、重力が大きいので A よりも大きな加速度で落下する」という説明が誤りである理由を、運動方程式を使って述べよ。

対応解説：巻末の「演習 4 の解答・解説」

©ミライコーチング

演習 5

地球を自転しない球対称な天体として近似する。

地球モデルの半径を

$$R = 6.4 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$$

とし、地表の重力加速度の大きさを g_0 とする。

地球の外部では、

$$g(h) = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$$

が成り立つ。

演習 5(1) 重力加速度の大きさが $\frac{g_0}{4}$ となる高度 h を求めよ。答えは m と km の両方で示せ。

演習 5(2) (1)の場所における、地球の中心から対象物体までの距離 r を求めよ。

演習 5(3) 重力加速度の大きさが $\frac{g_0}{9}$ となる高度を R を用いて表せ。

演習 5(4) 「高度が地球半径の 2 倍になると、重力加速度は地表の $\frac{1}{4}$ になる」という説明が誤りである理由を述べよ。

対応解説：巻末の「演習 5 の解答・解説」

演習 6

ある球対称天体の表面における重力加速度の大きさが

$$g_0 = 8.0\,\mathrm{m/s^2}$$

であり、その天体の半径は

$$R = 5.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$$

である。

万有引力定数を

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$$

とし、天体の自転と他の天体の影響を無視する。

演習 6(1) 天体の質量 M を表す式を、g_0、R、G を使って導け。

演習 6(2) この天体の質量を求めよ。

演習 6(3) (2)で求める天体の質量が、重力加速度を調べるために用いた試験物体の質量に依存しない理由を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 6 の解答・解説」

演習 7

次の各説明が正しいか誤っているかを判断し、理由を述べよ。

万有引力を計算する際は、質点近似または球対称天体の外部という条件を考え、天体の自転と遠心効果、他の天体の影響を無視するものとする。

演習 7(1)「中心間距離を 2 倍にすると、二つの物体に働く万有引力の大きさは、質量を変えない限り $\frac{1}{4}$ になる。」

演習 7(2)「地表で物体に働く重力の大きさが 2 倍になれば、その場所の重力加速度も必ず 2 倍になる。」

演習 7(3)「球対称な天体の外部であれば、天体の質量が中心に集まっているものとして万有引力を計算できる。」

演習 7(4)「球対称な天体では、中心より外側のどの場所でも、中心からの距離の二乗に反比例する式を使える。」

演習 7(5)「重力加速度が $10\,\mathrm{m/s^2}$ と与えられたとき、これは試験物体の質量が $10\,\mathrm{kg}$ であることを意味する。」

対応解説：巻末の「演習 7 の解答・解説」

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1)

A が B から受ける万有引力と、B が A から受ける万有引力は、**大きさが等しく、向きが反対**である。

A が受ける力は B の方向、B が受ける力は A の方向を向く。

これらは作用と反作用の関係にある。

演習 1(2)

二つの力は別々の物体に働くからである。

A が B から受ける力は A に働く。一方、B が A から受ける力は B に働く。

力がつり合うかどうかを判断するときは、一つの物体に働く力を集めて考える。

したがって、A が受ける万有引力と B が受ける万有引力を、同じ物体に働く力として相殺することはできない。

本問では、各質点に万有引力以外の力が働かないため、両質点には相手の方向への加速度が生じる。

©ミライコーチング

演習 1(3)

A、B が受ける万有引力の共通の大きさを F とする。

運動方程式から、

$$a_A = \frac{F}{m_A}$$

$$a_B = \frac{F}{m_B}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned}\frac{a_A}{a_B} &= \frac{\frac{F}{m_A}}{\frac{F}{m_B}} \\ &= \frac{m_B}{m_A} \\ &= \frac{6.0\,\mathrm{kg}}{4.0\,\mathrm{kg}} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

よって、

$$a_A : a_B = 3 : 2$$

である。

質量が小さい A のほうが、加速度の大きさは大きい。作用と反作用の力が等しいことは、加速度が等しいことを意味しない。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1)

万有引力の大きさは

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

である。

M だけを 2 倍にすると、質量の積 Mm は 2 倍になり、距離は変わらない。

したがって、

$$F' = 2F$$

となり、**2 倍**である。

演習 2(2)

二つの質量は変わらない。

中心間距離を 3 倍にすると、分母は

$$(3r)^2 = 9r^2$$

となる。

したがって、

$$F' = \frac{F}{9}$$

となり、$\frac{1}{9}$ **倍**である。

演習 2(3)

両方の質量を 2 倍にすると、その積は 4 倍になる。

中心間距離を 3 倍にすると、距離の二乗は 9 倍になる。

したがって、万有引力の比は

$$\begin{aligned}\frac{F'}{F} &= \frac{2 \times 2}{3^2} \\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

となる。

よって、$\frac{4}{9}$ **倍**である。

演習 2(4)

万有引力の式で使う距離 r は、中心間距離だからである。

大きさのある物体では、表面間のすき間が 2 倍になっても、中心間距離が 2 倍になるとは限らない。

したがって、表面間のすき間だけから、万有引力が必ず $\frac{1}{4}$ になるとは判断できない。

$\frac{1}{4}$ になるのは、二つの質量を変えず、**中心間距離が 2 倍になる場合**である。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1)

天体の表面では、

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

である。

天体 A の質量は $\frac{M}{4}$、半径は $\frac{R}{2}$ なので、

$$\begin{aligned} g_A &= G\frac{\frac{M}{4}}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} \\ &= G\frac{\frac{M}{4}}{\frac{R^2}{4}} \\ &= G\frac{M}{R^2} \\ &= g_0 \end{aligned}$$

となる。

したがって、天体 A の表面の重力加速度は、地球モデルの **1 倍**である。

質量が小さくなった効果と、半径が小さくなった効果が、ちょうど打ち消し合っている。

演習 3(2)

天体 B の質量は M、半径は $2R$ である。

$$\begin{aligned} g_B &= G\frac{M}{(2R)^2} \\ &= G\frac{M}{4R^2} \\ &= \frac{g_0}{4} \end{aligned}$$

となる。

したがって、天体 B の表面の重力加速度は、地球モデルの $\frac{1}{4}$ **倍**である。

演習 3(3)

表面の重力加速度は、天体の質量 M だけでなく、半径 R にも依存するからである。

同じ質量であっても半径が異なれば、表面から天体の中心までの距離が異なる。

万有引力は中心間距離の二乗に反比例するため、半径の違いも重力加速度に影響する。

したがって、質量だけで比較せず、

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

において質量と半径の両方を確認する必要がある。

なお、本問の比較に密度一定という条件は必要ない。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1)

本問で与えられた重力加速度は

$$g_0 = 10\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

A の質量は 2 kg なので、

$$\begin{aligned} F_A &= m_A g_0 \\ &= (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 20\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

B の質量は 5 kg なので、

$$\begin{aligned} F_B &= m_B g_0 \\ &= (5\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 50\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

よって、A に働く重力は 20 N、B に働く重力は 50 N である。

演習 4(2)

重力だけが働く場合、運動方程式は

$$ma = mg_0$$

である。

物体の質量は正なので、両辺を質量 m で割ると、

$$a = g_0$$

となる。

したがって、A と B の加速度の大きさはいずれも

$$a = 10\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

向きも両方とも天体の中心に向かう方向である。

演習 4(3)

B に働く重力は A より大きいが、B の質量も大きい。

A について、

$$a_A = \frac{20\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} = 10\,\mathrm{m/s^2}$$

であり、B についても、

$$a_B = \frac{50\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{kg}} = 10\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

重力の大きさは物体の質量に比例するが、加速度を求める際には、その重力を物体の質量で割る。

したがって、**同じ場所で重力だけが働く場合、試験物体の質量が異なっても加速度の大きさは等しい**。

ここで使用した $10\,\mathrm{m/s^2}$ は本問だけに与えられた条件である。本文の地球モデルから計算した約 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ と混ぜてはならない。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1)

条件は

$$g(h) = \frac{g_0}{4}$$

である。

高度による重力加速度の式から、

$$g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = \frac{g_0}{4}$$

となる。

$g_0 > 0$ なので両辺を g_0 で割ると、

$$\left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

である。

ここで、$R > 0$、$h \geq 0$ なので、$\frac{R}{R+h}$ は正である。

したがって、

$$\frac{R}{R+h} = \frac{1}{2}$$

となる。

これを解くと、

$$2R = R + h$$
$$h = R$$

である。

よって、

$$h = 6.4 \times 10^6 \,\mathrm{m}$$

となる。

$1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$ なので、

$$h = 6400\,\mathrm{km}$$

である。

演習 5(2)

中心間距離は

$$r = R + h$$

である。

(1)より $h = R$ なので、

$$\begin{aligned} r &= 2R \\ &= 2(6.4 \times 10^6\,\mathrm{m}) \\ &= 1.28 \times 10^7\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

高度は R であるが、中心間距離は $2R$ である。

演習 5(3)

条件は

$$g(h) = \frac{g_0}{9}$$

である。

したがって、

$$\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

となる。

$\frac{R}{R+h} > 0$ より、

$$\frac{R}{R+h} = \frac{1}{3}$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} 3R &= R + h \\ h &= 2R \end{aligned}$$

となる。

求める高度は $2R$ である。

演習 5(4)

高度が $2R$ の場合、中心間距離は

$$r = R + 2R = 3R$$

となる。

したがって、

$$g(2R) = g_0\left(\frac{R}{3R}\right)^2 = \frac{g_0}{9}$$

である。

よって、重力加速度は地表の $\frac{1}{4}$ ではなく、$\frac{1}{9}$ になる。

誤った説明では、高度 h と中心間距離 r を混同している。

地表で中心間距離はすでに R あるため、高度を考える場合は必ず $R + h$ にする必要がある。

演習 6 の解答・解説

演習 6(1)

球対称な天体の表面では、

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

である。

両辺に R^2 を掛けると、

$$g_0 R^2 = GM$$

となる。

両辺を G で割ると、

$$M = \frac{g_0 R^2}{G}$$

である。

演習 6(2)

与えられた値を代入する。

$$\begin{aligned} M &= \frac{g_0 R^2}{G} \\ &= \frac{(8.0\,\mathrm{m/s^2})(5.0\times10^{6}\,\mathrm{m})^2}{6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}} \\ &\approx 2.9985007496251875\times10^{24}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

となる。

したがって、概算値として

$$M \approx 3.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}$$

である。

単位も確認する。

$$\begin{aligned} \frac{(\mathrm{m/s^2})\mathrm{m}^2}{\mathrm{N\,m^2/kg^2}} &= \frac{\mathrm{kg^2\,m^3/s^2}}{\mathrm{N\,m^2}} \\ &= \mathrm{kg} \end{aligned}$$

となる。

質量を求めているので、答えの単位が kg になっていることは妥当である。

演習 6(3)

重力加速度を求める式は、試験物体の質量 m によらず、

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

となるからである。

この式は、試験物体に働く重力について

$$mg_0 = G\frac{Mm}{R^2}$$

と表し、両辺を m で割ることで得られる。

試験物体の質量が変われば、その物体に働く重力の大きさは変化する。しかし、同じ場所での重力加速度は変わらない。

したがって、天体の質量を求める式にも試験物体の質量は現れない。

演習 7 の解答・解説

演習 7(1) 正しい。

二つの物体の質量を変えない場合、万有引力の大きさは中心間距離の二乗に反比例する。

したがって、

$$\frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{2r}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

となる。

この関係は、二つの質量を変えず、中心間距離を 2 倍にした場合に成立する。

演習 7(2) 誤りである。

重力の大きさは

$$F = mg$$

である。

同じ場所で物体の質量を 2 倍にすれば、重力の大きさも 2 倍になるが、重力加速度は変わらない。

したがって、重力の大きさが 2 倍になったという事実だけから、重力加速度も 2 倍になったとは判断できない。

演習 7(3) 正しい。

球対称な天体の表面または外部では、天体の全質量が中心に集まっているものとして、万有引力を計算できる。

したがって、天体の質量を M、中心から対象物体までの距離を r とすれば、

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

を使うことができる。

ただし、これは球対称天体の外部に関する関係であり、球対称でない天体にそのまま適用できるとは限らない。

演習 7(4) 誤りである。

球対称な天体の外部用の式が適用できるのは、天体の半径を R としたとき、$r \geq R$ の範囲である。

天体の中心より外側であっても、$0 < r < R$ なら天体の内部にある。

そのような場所へ、天体の全質量が中心に集まっているものとした外部用の式を、そのまま延長してはならない。

演習 7(5) 誤りである。

$10\,\mathrm{m/s^2}$ は重力加速度の大きさを表しており、試験物体の質量を示しているわけではない。

質量の単位は kg、重力の大きさの単位は N、重力加速度の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。

例えば質量 $2\,\mathrm{kg}$ の物体がその場所にあれば、重力の大きさは

$$F = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

となる。

このように、質量・重力・重力加速度は、それぞれ異なる物理量である。