

第 111 講 半角の公式

学習目標

- ・ 半角の公式が 2 倍角の公式から導かれることを説明できる。
- ・ $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ 、 $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$ の公式を、条件に注意して利用できる。
- ・ 平方根を取るとき、角の範囲から符号を判断する理由を説明できる。

半角の公式を導く考え方

半角の公式は、新しい公式として暗記するよりも、2 倍角の公式を逆向きに使うことで作れると考えたとよい。

角 $\frac{\alpha}{2}$ を 2 倍すると α になるので、余弦の 2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ において、 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ と置く。すると、 $2\theta = \alpha$ であるから、次のように計算する。

$$\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

同様に、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を利用すると、次のように計算する。

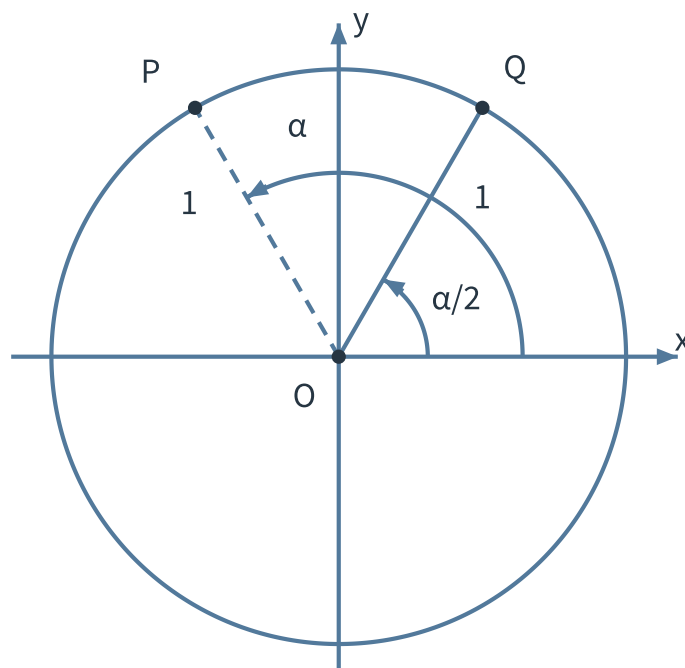
$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{2}\end{aligned}$$

したがって、半角公式は $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ 、 $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ として利用できる。

ただし、ここで求められるのは 2 乗の値である。実際の $\sin \frac{\alpha}{2}$ や $\cos \frac{\alpha}{2}$ を求めるには平方根を取る必要がある。

平方根は大きさを表すため、 $\sqrt{u^2} = |u|$ であり、根号の値は必ず 0 以上になる。一方で、もとの数 u 自体が正か負かは、平方根を取る操作だけでは決まらない。したがって、 $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ や $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ から平方根を取るときは、半角の角 $\frac{\alpha}{2}$ がどの象限にあるかを確認して符号を決める。元の角 α の象限だけを見て判断してはいけない。

例えば、 $\frac{\alpha}{2}$ が第 1 象限なら $\sin \frac{\alpha}{2}$ も $\cos \frac{\alpha}{2}$ も正である。第 2 象限なら $\sin \frac{\alpha}{2}$ は正、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ は負になる。元の角 α の象限だけで符号を決めると、半分にした後の位置を誤ることがある。半角では「角を半分にした後の象限」を必ず確認する。

図1 角 α と角 $\frac{\alpha}{2}$ を表す単位円

正接の半角公式

正接は $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ で定義されるため、半角公式から導ける。

$$\begin{aligned}\tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\end{aligned}$$

したがって、 $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ である。

ただし、分母の $1 + \cos \alpha$ が0になる場合、この式は使えない。これは $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ となり、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ が未定義になる場合と対応する。

また、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ の符号も、 $\frac{\alpha}{2}$ の象限で判断する。平方根を取った後に、元の角 α だけを見て符号を決めてはいけない。

半角を使うときの条件整理

半角公式を使うときは、次の順序で考える。

1. 元の角 α の範囲から、半分にした角 $\frac{\alpha}{2}$ の範囲を確認する。
2. 半角公式で2乗の値を求める。
3. 平方根を取り、 $\frac{\alpha}{2}$ の象限から符号を決める。
4. 必要なら $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ で確認する。

境界の場合にも注意が必要である。 $\sin \frac{\alpha}{2} = 0$ や $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ になることはあるが、0になることと定義できないことは別である。分母が0になる場合だけ、正接は未定義になる。

また、一般角では角を先に 2π の範囲へ戻してから半分にすると、半分にした角の位置が変わり、符号判断を誤ることがある。与えられた角の範囲をそのまま半分にすることが基本である。

例題 1

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ かつ $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ である。

半角の範囲を示し、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ を求めなさい。

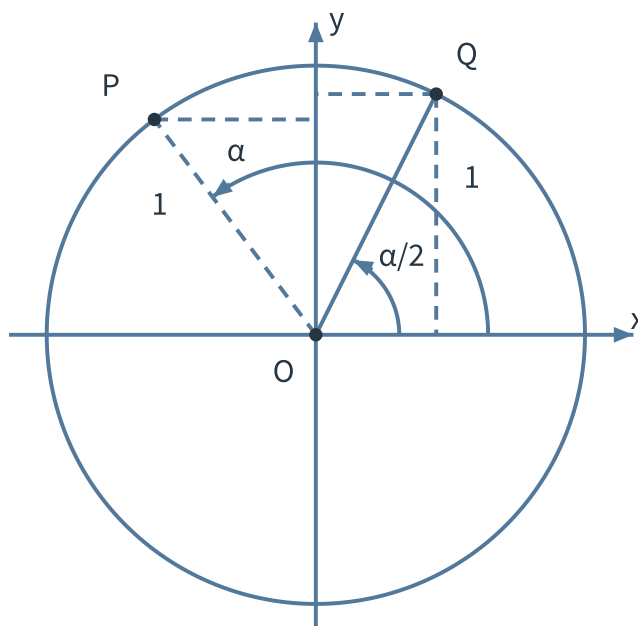


図2 第2象限の点Pと半角に対応する点Q

例題 1：の解答・解説

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であるから、両辺を2で割ると、 $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ となる。

したがって、 $\frac{\alpha}{2}$ は第1象限にあり、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ はすべて正である。

半角公式より、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{8}{5}}{2} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

であるから、 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ となる。

同様に、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{3}{5}}{2} \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{2} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

より、 $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる。
したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \\ &= 2\end{aligned}$$

ここで得られた $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ と $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ は、有理化するとそれぞれ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 、 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ になる。どちらも分母分子に $\sqrt{5}$ を掛けて、分母から根号をなくしている。

ここでは α が第2象限であることではなく、 $\frac{\alpha}{2}$ が第1象限であることから符号を決定している点が重要である。

例題 2

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ かつ $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$ である。

半角の範囲を示し、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ を求めなさい。また、例題1と余弦の符号が異なる理由を説明しなさい。

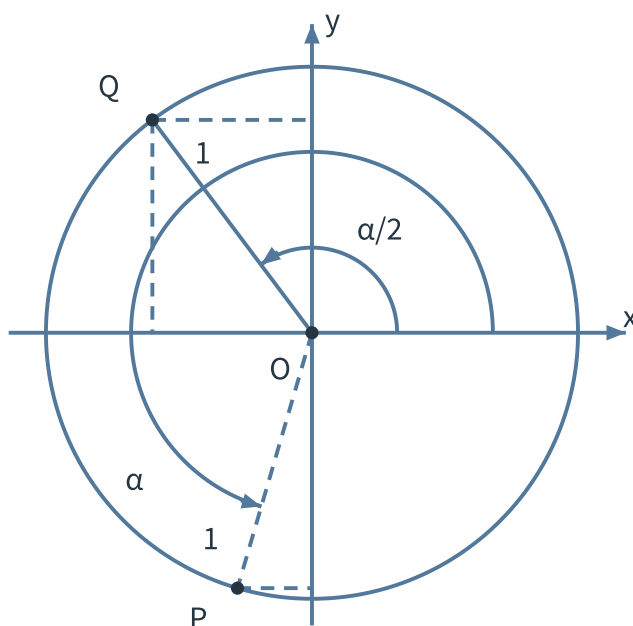


図3 第3象限の点Pと第2象限の点Q（円弧は反時計回り）

例題 2：の解答・解説

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ であるから、 $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$ となる。

したがって、 $\frac{\alpha}{2}$ は第 2 象限にあり、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ は正、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ は負、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ は負である。

半角公式より、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{7}{25}}{2} \\ &= \frac{\frac{32}{25}}{2} \\ &= \frac{16}{25}\end{aligned}$$

よって、 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$ である。

また、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{7}{25}}{2} \\ &= \frac{\frac{18}{25}}{2} \\ &= \frac{9}{25}\end{aligned}$$

$\frac{\alpha}{2}$ は第 2 象限なので、余弦は負になる。したがって、 $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$ である。

よって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \\ &= -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

例題 1 では $\frac{\alpha}{2}$ が第 1 象限、例題 2 では $\frac{\alpha}{2}$ が第 2 象限である。そのため、同じように $\cos \frac{\alpha}{2}$ を求める場合でも符号が変わる。

例題 3

半角公式を利用して、 $\sin \frac{\pi}{8}$ 、 $\cos \frac{\pi}{8}$ 、 $\tan \frac{\pi}{8}$ の厳密値を求めなさい。

例題 3：の解答・解説

$\frac{\pi}{8}$ は $\frac{\pi}{4}$ の半分である。したがって、半角公式では元の角を $\alpha = \frac{\pi}{4}$ として扱う。

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{8}$ は第1象限にあるため、正の平方根を取る。 $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ である。
同様に、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

より、 $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ である。

最後に、正接の定義から、 $\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ となる。

この式を有理化するために、分子分母へ $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ を掛ける。

$$\begin{aligned}\tan \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ここで分母を有理化するために、分母分子へ $2-\sqrt{2}$ を掛ける。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-2}{2} \\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

したがって、 $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ である。

また、別の確認として、 $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$ であり、第1象限にある $\frac{\pi}{8}$ の正接は正であるため、正の根を選ぶこととも一致する。

ここでは、元の角 $\frac{\pi}{4}$ を半分にして求める角が $\frac{\pi}{8}$ であることを区別することが重要である。

演習問題

演習問題 1

半角公式を利用して、 $\sin \frac{\pi}{12}$ の値を求めなさい。

演習問題 2

$0 < \alpha < \pi$ かつ $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ である。

$\frac{\alpha}{2}$ の範囲を示し、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ を求めなさい。

演習問題 3

$\pi < \alpha < 2\pi$ かつ $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ である。

$\frac{\alpha}{2}$ の象限を確認して、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ を求めなさい。

演習問題 4

次の誤りを説明し、正しい考え方を書きなさい。

「 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ だから、 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。」

演習問題 5

$\alpha = \frac{5\pi}{2}$ について考える。

ある生徒は「 $\frac{5\pi}{2}$ を先に $\frac{\pi}{2}$ へ直してから半分にする」と考えた。この考え方の問題点を説明し、正しく $\sin \frac{\alpha}{2}$ の符号を判断しなさい。

演習問題 6

次の 2 つの場合について、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ を求めなさい。

(1) $\alpha = 0$

(2) $\alpha = \pi$

それぞれ、0 になる場合と未定義になる場合を区別して説明しなさい。

演習問題 7

$\cos \alpha = -\frac{15}{17}$ である。

次の条件ごとに、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ の符号を答えなさい。

(1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

(2) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

演習問題 8

半角公式を利用して、次の式を導きなさい。

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

この式を用いるために必要な条件を述べ、その条件を満たさない場合の $\tan \frac{\alpha}{2}$ について説明しなさい。

演習問題の解答・解説**演習問題 1 の解答・解説**

$\frac{\pi}{12}$ は $\frac{\pi}{6}$ の半分であるから、半角公式で元の角を $\alpha = \frac{\pi}{6}$ として考える。
 $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{12}$ は第 1 象限にあるため、正の平方根を取る。したがって、 $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ である。
 符号を正にした理由は、平方根そのものが正だからではなく、半角の角 $\frac{\pi}{12}$ が第 1 象限にあるためである。

演習問題 2 の解答・解説

$0 < \alpha < \pi$ なので、 $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ となる。
 したがって、 $\frac{\alpha}{2}$ は第 1 象限にあり、3 つの値はすべて正である。
 半角公式より、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって、 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。
 また、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

より、 $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ である。
 したがって、 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

演習問題 3 の解答・解説

$\pi < \alpha < 2\pi$ なので、 $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ となる。
 したがって、 $\frac{\alpha}{2}$ は第 2 象限であり、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ は正、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ は負になる。
 半角公式より、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} \\ &= \frac{4}{13}\end{aligned}$$

であるから、 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ である。
 また、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \frac{5}{13}}{2} \\ &= \frac{9}{13}\end{aligned}$$

第 2 象限なので符号は負であり、 $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ である。
 したがって、 $\tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{3}$ となる。
 余弦が正であっても、半分にした角が第 2 象限なら半角の余弦は負になる。この点が元の角だけを見る誤りである。

演習問題 4 の解答・解説

誤りは、平方根を取るときに符号を決めていないことである。
 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ から分かるのは大きさだけであり、 $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。
 正負は $\frac{\alpha}{2}$ の象限で決定する。例えば、 $\frac{\alpha}{2}$ が第 1 象限なら正、第 3 象限なら負になる。
 平方根は $\sqrt{u^2} = |u|$ であるため、平方根を取っただけで正と決めることはできない。

演習問題 5 の解答・解説

$\alpha = \frac{5\pi}{2}$ では、角を先に $\frac{\pi}{2}$ へ戻してから半分にしてはいけない。
 理由は、半分にする操作によって角の位置が変化するためである。
 与えられた角をそのまま半分にすると、 $\frac{\alpha}{2} = \frac{5\pi}{4}$ となる。
 $\frac{5\pi}{4}$ は第 3 象限なので、 $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$ である。
 一方、 $\frac{\pi}{2}$ を半分にすると $\frac{\pi}{4}$ となり、第 1 象限と判断してしまう。この符号の違いが誤りの原因である。

演習問題 6 の解答・解説

(1) $\alpha = 0$ の場合、 $\frac{\alpha}{2} = 0$ である。
 したがって、 $\tan \frac{\alpha}{2} = \tan 0 = 0$ となる。
 正接は $\sin \theta = 0$ でも、 $\cos \theta \neq 0$ なら定義される。
 (2) $\alpha = \pi$ の場合、 $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ である。
 このとき、 $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ となるため、 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ の分母が 0 になる。
 したがって、 $\tan \frac{\alpha}{2}$ は未定義である。
 0 になることと、分母が 0 になって定義できないことは区別する必要がある。

演習問題 7 の解答・解説

$\cos \alpha = -\frac{15}{17}$ であっても、半角の符号は α ではなく $\frac{\alpha}{2}$ で判断する。

(1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ の場合、 $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので、 $\frac{\alpha}{2}$ は第 1 象限である。

したがって、 $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ となる。

(2) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ の場合、 $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$ なので、 $\frac{\alpha}{2}$ は第 2 象限である。

したがって、 $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ となる。

同じ $\cos \alpha$ の符号だけを見ても、半角の符号は決まらない。

演習問題 8 の解答・解説

正接の定義から、 $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ である。

半角公式を代入すると、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\end{aligned}$$

ただし、分母に $1 + \cos \alpha$ があるため、 $1 + \cos \alpha \neq 0$ でなければならない。

もし $1 + \cos \alpha = 0$ なら、 $\cos \alpha = -1$ であり、 $\frac{\alpha}{2}$ では余弦が 0 になる場合と対応する。そのとき正接は未定義になる。