第 222 講 ベクトルの実数倍

学習目標

- ベクトルの正の実数倍、負の実数倍、0倍を、向きと大きさに着目して説明できる。
- $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$ を用いて、実数倍されたベクトルの大きさを求められる。
- ベクトルの実数倍に関する基本性質を用いて、式を整理できる。
- 同じ向きまたは反対向きのベクトルを、1 つのベクトルの実数倍として表せる。

1. 正の実数倍

同じ向きのまま大きさを変える

零ベクトルでないベクトル $\vec{a}$ と正の実数 k を考える。$\vec{a}$ と同じ向きで、大きさが $\vec{a}$ の k 倍であるベクトルを、$\vec{a}$ の k 倍といい、$k\vec{a}$ と書く。
例えば、$2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが 2 倍、$\frac{1}{2}\vec{a}$ は同じ向きで大きさが半分である。実数倍では、矢印を置く場所は変わってもよい。向きと大きさの関係に注目する。

正の実数倍

$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $k>0$ のとき、$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで、その大きさは次のようになる。

$$|k\vec{a}|=k|\vec{a}|$$

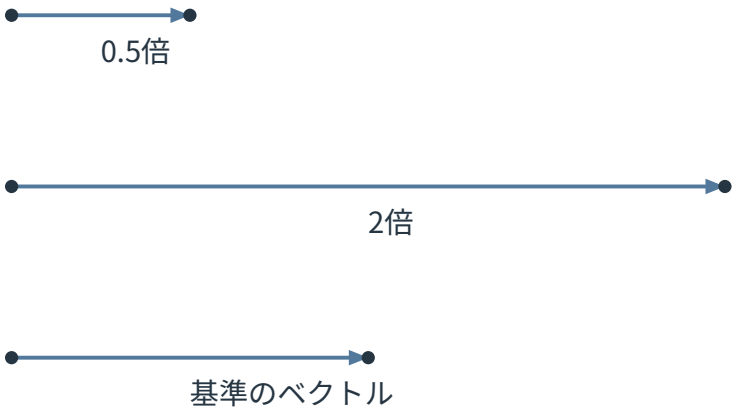

図 1　正の実数倍では向きが同じで大きさが変わる

係数が 1 より小さい場合

$0<k<1$ でも向きは変わらない。ただし、大きさは元のベクトルより小さくなる。「実数倍だから必ず長くなる」と考えないことが大切である。

2. 負の実数倍と 0 倍

負の実数倍

$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $k < 0$ のとき、$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対の向きで、その大きさは次のようになる。

$$| k\vec{a} | = | k | | \vec{a} |$$

例えば、$-2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対の向きで大きさが 2 倍、$-\frac{1}{2}\vec{a}$ は反対の向きで大きさが半分である。特に、$-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ は $\vec{a}$ の逆ベクトルである。

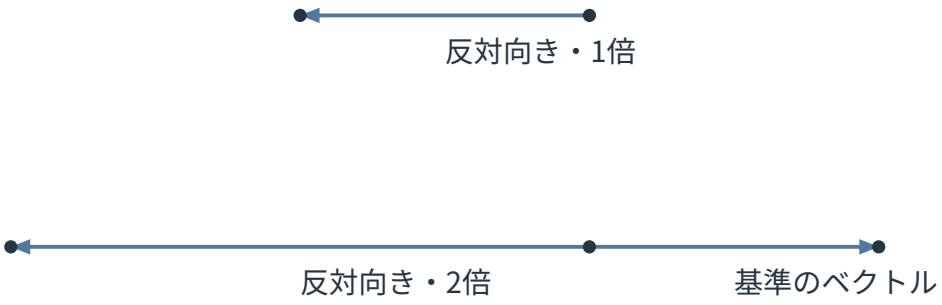

図 2　負の実数倍では向きが反対になる

0 倍

ベクトル $\vec{a}$ に対して、$0\vec{a} = \vec{0}$ と定める。零ベクトル $\vec{0}$ の大きさは 0 であり、向きはもたない。
したがって、実数 k の符号を含めてまとめると、次のようになる。
- $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $k > 0$：$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向き
- $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $k < 0$：$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対の向き
- $k = 0$：$k\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} = \vec{0}$ のときは、k の値によらず $k\vec{a} = \vec{0}$ である。
また、すべての実数 k について、$| k\vec{a} | = | k | | \vec{a} |$ が成り立つ。

符号と大きさを分けて考える

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき、負号は向きを反対にし、絶対値 $| k |$ は大きさが何倍になるかを表す。したがって、$-3\vec{a}$ の大きさは、係数の絶対値を用いて $| -3\vec{a} | = 3 | \vec{a} |$ と表す。

3. 実数倍の基本性質

実数と同じように分配できる

ベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ と実数 k、l について、次の性質が成り立つ。

- $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$
- $1\vec{a} = \vec{a}$、$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$、$k\vec{0} = \vec{0}$

これらにより、同じベクトルの実数倍どうしは、実数の文字式と同じ形で係数をまとめられる。例えば、$3\vec{a} - 5\vec{a} = (3-5)\vec{a} = -2\vec{a}$ である。

分配法則を図で捉える

図では、「和を作ってから 2 倍したベクトル」と「それぞれを 2 倍してから作った和」が、同じ向きと大きさをもつことを別位置の矢印で示している。したがって、$2\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$ である。この等式は、和が零ベクトルになる場合にも成り立つ。

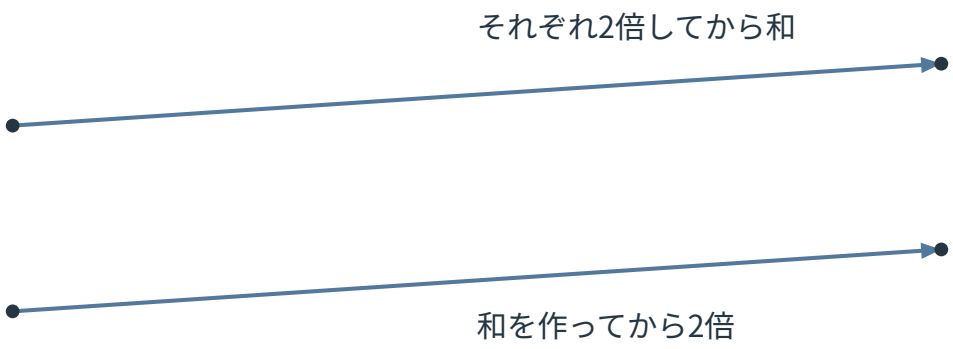

図 3　分配法則 $2\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

4. 平行なベクトルと実数倍

同一直線上の向きを係数で表す

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ が同じ向きまたは反対向きなら、ある実数 k を用いて $\vec{b} = k\vec{a}$ と表せる。
$\vec{b}$ が $\vec{a}$ と同じ向きなら $k > 0$、反対向きなら $k < 0$ である。さらに、$|\,k\,| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ である。
逆に、$\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす 0 でない実数 k があれば、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行である。したがって、零ベクトルでない 2 つのベクトルについて、$\vec{a} \parallel \vec{b}$ であることと、$\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす $k \neq 0$ があることは同値である。

零ベクトルを基準にしない

$\vec{a} = \vec{0}$ のとき、$k\vec{a}$ はどの実数 k に対しても $\vec{0}$ である。そのため、零ベクトルを基準にして、零ベクトルでない $\vec{b}$ を $\vec{b} = k\vec{a}$ と表すことはできない。

5. 例題

例題 1：実数倍の向きと大きさ

$|\vec{a}| = 4$ とする。$-\frac{3}{2}\vec{a}$ の向きと大きさを答えよ。

例題 1 の解答・解説

係数 $-\frac{3}{2}$ は負なので、向きは $\vec{a}$ と反対である。また、係数の絶対値は $\frac{3}{2}$ だから、大きさは次のようになる。

$$\begin{aligned}\left|-\frac{3}{2}\vec{a}\right| &= \frac{3}{2}\,|\vec{a}\,| \\ &= \frac{3}{2}\cdot 4 \\ &= 6\end{aligned}$$

したがって、$\vec{a}$ と反対の向きで、大きさは 6 である。

例題 2：係数をまとめる

$3\vec{a} - 5\vec{a} + 4\vec{a}$ を簡単にせよ。

例題 2 の解答・解説

同じベクトル $\vec{a}$ の係数をまとめると、$3\vec{a} - 5\vec{a} + 4\vec{a} = (3 - 5 + 4)\vec{a} = 2\vec{a}$ である。一方、$3\vec{a} + 5\vec{b}$ のように異なるベクトルを含む式は、一般には係数を足して 1 つの実数倍にまとめることはできない。

例題 3：実数倍で表す

零ベクトルでない $\vec{a}$ と反対向きで、大きさが $\vec{a}$ の $\frac{5}{3}$ 倍であるベクトル $\vec{b}$ を、$\vec{a}$ を用いて表せ。

例題 3 の解答・解説

反対向きなので係数は負である。また、大きさの比が $\frac{5}{3}$ なので、係数の絶対値は $\frac{5}{3}$ である。したがって、$\vec{b} = -\frac{5}{3}\vec{a}$ である。

6. 演習問題

演習 1：正の実数倍

$|\vec{a}| = 6$ のとき、$\frac{2}{3}\vec{a}$ の向きと大きさを答えよ。

演習 2：負の実数倍

$|\vec{b}| = 5$ のとき、$-2\vec{b}$ の向きと大きさを答えよ。

©ミライコーチング

演習 3：0 倍と零ベクトル

次の式を簡単にせよ。
(1) $0\vec{a}$
(2) $7\vec{0}$

演習 4：係数の計算

$4\vec{a}-7\vec{a}+2\vec{a}$ を簡単にせよ。

演習 5：分配法則

$-2\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)+5\vec{a}-4\vec{b}$ を簡単にせよ。

演習 6：向きと大きさから係数を決める

零ベクトルでない $\vec{p}$、$\vec{q}$ が互いに反対向きである。また、$|\,\vec{q}\,|=2.5\,|\,\vec{p}\,|$ である。$\vec{q}$ を $\vec{p}$ の実数倍で表せ。さらに、その式から $\vec{p}\parallel\vec{q}$ を確認せよ。

7. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

係数 $\frac{2}{3}$ は正なので、向きは $\vec{a}$ と同じである。大きさは $\left|\frac{2}{3}\vec{a}\right|=\frac{2}{3}\cdot 6=4$ である。

演習 2 の解答・解説

係数 -2 は負なので、向きは $\vec{b}$ と反対である。大きさは $|\,-2\vec{b}\,|=|\,-2\,||\,\vec{b}\,|=2\cdot 5=10$ である。

演習 3 の解答・解説

(1) 実数倍の定義より、$0\vec{a}=\vec{0}$ である。
(2) 零ベクトルは実数倍しても零ベクトルなので、$7\vec{0}=\vec{0}$ である。

演習 4 の解答・解説

同じベクトル $\vec{a}$ の係数をまとめると、$4\vec{a}-7\vec{a}+2\vec{a}=(4-7+2)\vec{a}=-\vec{a}$ である。

演習 5 の解答・解説

分配法則を用いると、次のようになる。
まず、$-2\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)+5\vec{a}-4\vec{b}=-2\vec{a}+6\vec{b}+5\vec{a}-4\vec{b}$ である。
よって、$-2\vec{a}+6\vec{b}+5\vec{a}-4\vec{b}=3\vec{a}+2\vec{b}$ である。

演習 6 の解答・解説

$\vec{q}$ は $\vec{p}$ と反対向きなので係数は負であり、大きさの比は 2.5 である。したがって、$\vec{q}=-2.5\vec{p}=-\frac{5}{2}\vec{p}$ である。
係数 $-\frac{5}{2}$ は 0 でない。零ベクトルでない $\vec{q}$ が $\vec{p}$ の 0 でない実数倍で表されたので、$\vec{p}\parallel\vec{q}$ であることも確認できる。

©ミライコーチング