第 259 講 複素数で図形条件を表す

学習目標

- 複素数の差を、複素数平面上の点を結ぶ有向線分として読める。
- 3 点の一直線上、2 直線の垂直を商の実数・純虚数条件で表せる。
- 絶対値の等式を距離の条件に読み替え、軌跡を判断できる。
- 商を用いる前に、分母が 0 でないための条件を確認できる。

1. 差と商が表す図形

差は位置の差、商は向きと長さの比を表す

複素数平面上の点 A, B, P を表す複素数をそれぞれ α, β, z とする。このとき $\beta-\alpha$ は、A から B へ向かうベクトルに対応する。したがって、

$$|\beta-\alpha| = AB$$

である。また、$\beta \neq \alpha$ のとき

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$$

は、向きの差と長さの比を同時に表す。分母をもつ式を使う前に、必ず $\beta-\alpha \neq 0$、すなわち $A \neq B$ を確認するのである。

一直線上の条件

$A \neq B$ とする。3 点 A, B, P が一直線上にあるための必要十分条件は

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} \in \mathbb{R}$$

である。実際、この商が実数 t なら $z-\alpha = t(\beta-\alpha)$ であり、点 A から P への向きを表す差は、点 A から B への向きを表す差の実数倍になる。逆も同様である。
なお、$P = A$ のとき商は 0 であり、0 は実数なので正しく含まれる。一方、$A = B$ では直線 AB が定まらず、商も定義されない。

例題 1：3 点が一直線上にあることを示す

$A(1+i), B(3+2i), P(5+3i)$ が一直線上にあることを示せ。

例題 1 の解答・解説

$\beta-\alpha = (3+2i)-(1+i) = 2+i \neq 0$ である。さらに、

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{(5+3i)-(1+i)}{(3+2i)-(1+i)} = \frac{4+2i}{2+i} = 2$$

は実数である。よって 3 点 A, B, P は一直線上にある。しかも $z-\alpha = 2(\beta-\alpha)$ なので、B は線分 AP の中点である。

©ミライコーチング

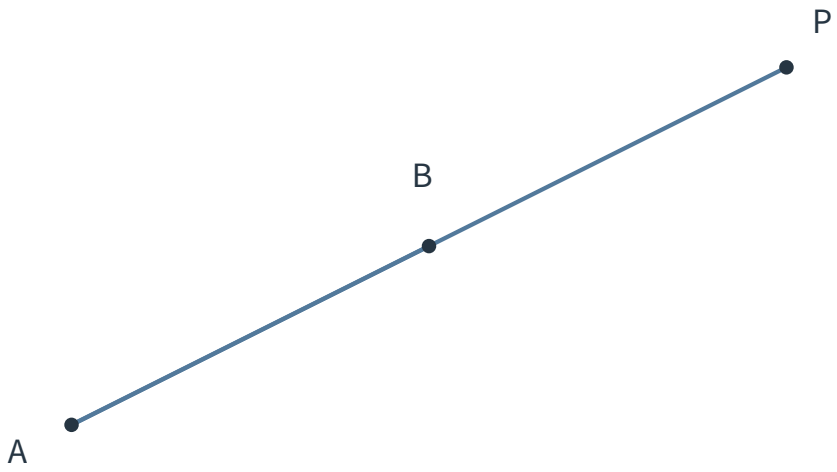

図 1　$z-\alpha=2(\beta-\alpha)$ の位置関係

共役を使った『実数である』の判定

複素数 w が実数であることと $w=\overline{w}$ は同値である。したがって $A\neq B$ のもとで一直線上の条件は

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$

とも書ける。分母を払うときも、$\beta-\alpha\neq 0$ とその共役が 0 でないことが根拠になる。

2. 垂直を純虚数で表す

2 直線が垂直である条件

$A\neq B$ かつ $P\neq A$ とする。直線 AP と直線 AB が垂直であるための必要十分条件は

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\in i\mathbb{R}$$

である。ここで $i\mathbb{R}$ は純虚数全体に 0 を加えた集合であるが、$P\neq A$ により商は 0 ではない。商の偏角が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍であることが、2 方向のなす角が直角であることを表す。

実部 0 という形でも判定できる

複素数 w の実部が 0 であることは $w+\overline{w}=0$ と同値である。よって、上の垂直条件は

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=0$$

と表せる。一直線上は「商の虚部が 0」、垂直は「商の実部が 0」と対比するとよい。

©ミライコーチング

例題 2：垂線上の点を求める

$A(1+i), B(3+i)$ とする。実部が 2 である点 $P(z)$ が直線 AB に垂直な、点 A を通る直線上にあるとき、z を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$z = 2 + yi$（$y \in \mathbb{R}$）とおく。$\beta - \alpha = (3+i) - (1+i) = 2 \neq 0$ である。垂直条件より、

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{(2+yi)-(1+i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{y-1}{2}i$$

の実部が 0 でなければならない。しかし実部は $\frac{1}{2}$ であり、これは 0 ではない。したがって、そのような点 P は存在しない。条件を式に翻訳した結果、存在しない場合も判定できるのである。

例題 3：直角をなす点を確かめる

$A(1+i), B(4+i), P(1+4i)$ とする。$\angle BAP = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。

例題 3 の解答・解説

$\beta - \alpha = 3 \neq 0$、$z - \alpha = 3i \neq 0$ であるから、2 本の直線はともに定まる。そして、

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{3i}{3} = i$$

は 0 でない純虚数である。よって直線 AP と直線 AB は垂直であり、$\angle BAP = \frac{\pi}{2}$ である。

©ミライコーチング

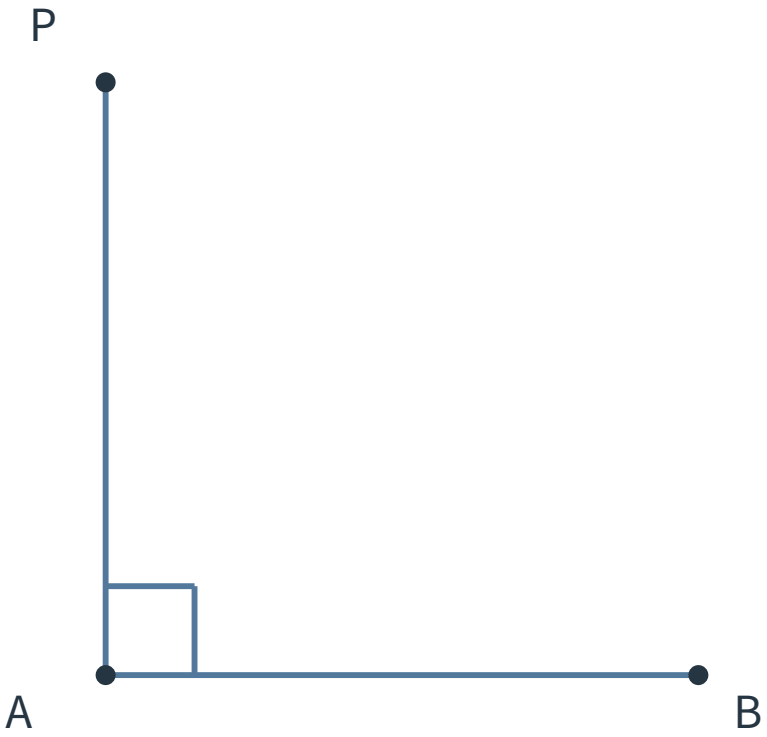

図 2　商が i のとき、向きは反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転する

3. 絶対値を距離として読む

1 点からの距離が一定なら円

点 $A(\alpha)$ と正の実数 r を固定する。条件

$$| z - \alpha | = r$$

は $AP = r$ を表す。したがって、これを満たす点 $P(z)$ の軌跡は、中心 A、半径 r の円である。$r = 0$ なら点 A だけになり、$r < 0$ なら解はないため、円というには $r > 0$ が必要である。

例題 4：絶対値の条件から円を読む

$| z - (2 - i) | = 3$ を満たす点 $P(z)$ の軌跡を答えよ。また $z = x + yi$ とおいたときの方程式を求めよ。

例題 4 の解答・解説

$2-i$ を表す点を A とすれば、条件は $AP=3$ である。したがって軌跡は中心 $(2,-1)$、半径 3 の円である。
また $z=x+yi$ とすると、

$$|\,z-(2-i)\,|=|\,(x-2)+(y+1)i\,|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

である。両辺は非負なので 2 乗してよく、方程式は

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

となる。

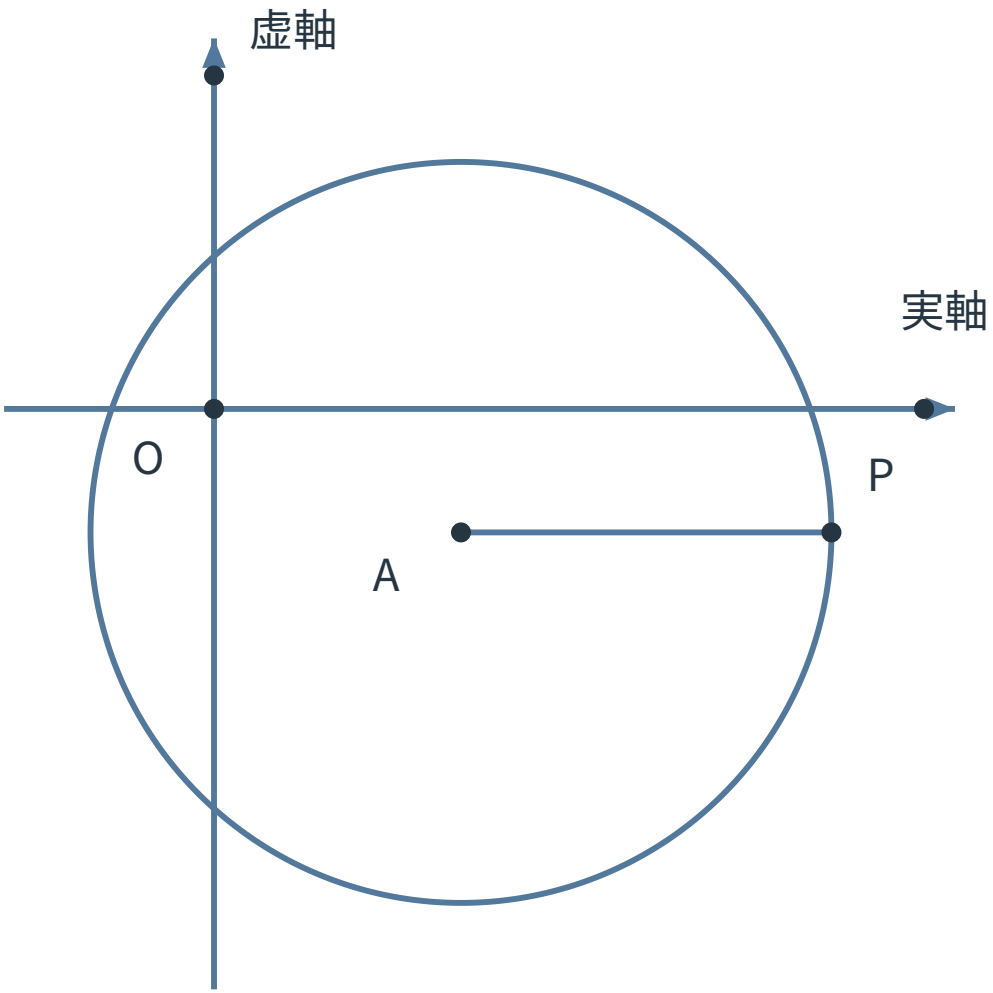

図 3　$|\,z-(2-i)\,|=3$ は中心 $A(2,-1)$、半径 3 の円を表す

2 点からの距離が等しければ垂直二等分線

相異なる 2 点 $A(\alpha), B(\beta)$ を固定する。条件

$$|\,z-\alpha\,|=|\,z-\beta\,|$$

は $AP=BP$ を表す。したがって軌跡は線分 AB の垂直二等分線である。$A=B$ ならすべての点が条件を満たすので、垂直二等分線を結論するには $A\neq B$ が必要である。

座標の式に直すと直線になる理由

$z=x+yi$、$\alpha=a+bi$、$\beta=c+di$ とする。両辺は非負なので 2 乗し、

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(x-c)^2+(y-d)^2$$

を得る。展開すると x^2, y^2 が消え、

$$2(c-a)x+2(d-b)y=c^2+d^2-a^2-b^2$$

という 1 次方程式になる。$A\neq B$ なら $c-a, d-b$ の少なくとも一方は 0 でないので、確かに直線を表す。

4. 演習問題

演習 1：一直線上

$A(-1+i), B(2+4i), P(5+7i)$ が一直線上にあることを、複素数の商を用いて示せ。

演習 2：未知数を含む一直線条件

$A(i), B(2+i), P(t+3i)$（$t\in\mathbb{R}$）が一直線上にあるような t が存在するか調べよ。

演習 3：垂直条件

$A(-1), B(2), P(-1-2i)$ に対し、直線 AB と直線 AP が垂直であることを示せ。

演習 4：円の軌跡

$|\,z+1-2i\,|=2$ を満たす点 $P(z)$ の軌跡の中心と半径を答えよ。

演習 5：垂直二等分線

$|\,z-(1+i)\,|=|\,z-(5+i)\,|$ を満たす点 $P(z)$ の軌跡を、$z=x+yi$ とおいて方程式で表せ。

演習 6：条件の例外

$\alpha=\beta$ のとき、(1) $|\,z-\alpha\,|=|\,z-\beta\,|$ を満たす点、(2) $\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\in\mathbb{R}$ という式の意味をそれぞれ答えよ。

©ミライコーチング

演習 1 の解答・解説

$\beta-\alpha=(2+4i)-(-1+i)=3+3i\neq 0$ である。また、

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(5+7i)-(-1+i)}{3+3i}=\frac{6+6i}{3+3i}=2\in\mathbb{R}$$

である。よって 3 点は一直線上にある。

演習 2 の解答・解説

$\beta-\alpha=(2+i)-i=2\neq 0$ である。一方、

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{t+3i-i}{2}=\frac{t}{2}+i$$

は、どの実数 t に対しても虚部が 1 であり、実数ではない。したがって、そのような t は存在しない。

演習 3 の解答・解説

$\beta-\alpha=2-(-1)=3\neq 0$、$z-\alpha=(-1-2i)-(-1)=-2i\neq 0$ である。

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=-\frac{2}{3}i$$

は 0 でない純虚数であるから、直線 AB と直線 AP は垂直である。

演習 4 の解答・解説

$z+1-2i=z-(-1+2i)$ である。したがって軌跡は、複素数 $-1+2i$ を表す点、すなわち $(-1,2)$ を中心とする半径 2 の円である。

演習 5 の解答・解説

$z=x+yi$ とおく。両辺を 2 乗すると、

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-5)^2+(y-1)^2$$

である。整理して $8x=24$、すなわち $x=3$ を得る。これは点 $(1,1)$ と $(5,1)$ を結ぶ線分の垂直二等分線である。

演習 6 の解答・解説

(1) $\alpha=\beta$ なら両辺は同じ量なので、すべての点 $P(z)$ が満たす。
(2) 分母が $\beta-\alpha=0$ となるため商は定義されず、この式には意味がない。一直線上の判定式は、異なる 2 点 A,B が 1 本の直線を定めることを前提としている。

条件式を使う前の確認

- $\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ を使うときは、先に $\beta\neq\alpha$ を確認する。
- 2 直線の垂直をいうときは、それぞれの方向を定める 2 点が異なることも確認する。
- $|z-\alpha|=r$ が円を表すのは $r>0$ のときである。
- $|z-\alpha|=|z-\beta|$ が垂直二等分線を表すのは $\alpha\neq\beta$ のときである。