第 266 講 複数の表現を使って問題を解く

学習目標

- 問題の目的に応じて、図・表・式・グラフが示す同じ情報を対応付けられる。
- 一つの表現で得た見通しを別の表現で確かめ、根拠を説明できる。
- 関係を表す図や行列を補助的に使い、条件の見落としを防げる。

1. 表現にはそれぞれ得意な仕事がある

同じ事象でも、表し方によって見えやすい性質が違う。概形や位置関係を見るなら図、値を正確に比べるなら表、数量の関係を一般的に扱うなら式、変化の全体像を見るならグラフが適している。対象どうしのつながりは離散グラフ、同じ型の数値を整理して読むときは行列が役立つ。
大切なのは、多くの表現を無理に使うことではない。まず「何を知りたいか」を決め、その目的に合う表現を選ぶ。さらに別の表現で確かめると、読み違いや条件の見落としを減らせる。

複数の表現を使う手順

1. 求めるものと条件を言葉で確認する。
2. 見通しを得やすい表現を選ぶ。
3. 必要な情報を別の表現へ移す。
4. 計算結果を元の事象に戻し、単位や範囲を確かめる。

2. 表と式で正確に、グラフで変化を見る

ある給水タンクには午前 9 時に水が 120 L 入っている。9 時から 13 時まで、1 時間ごとに 30 L ずつ給水し、同時に 1 時間ごとに 18 L ずつ使用する。時刻を 9 時から t 時間後とし、タンク内の水量を V L とする。ただし t は $0 \le t \le 4$ の実数であり、この間は給水と使用の割合が一定である。
1 時間当たりの正味の増加量は $30 - 18 = 12$ L なので、式は

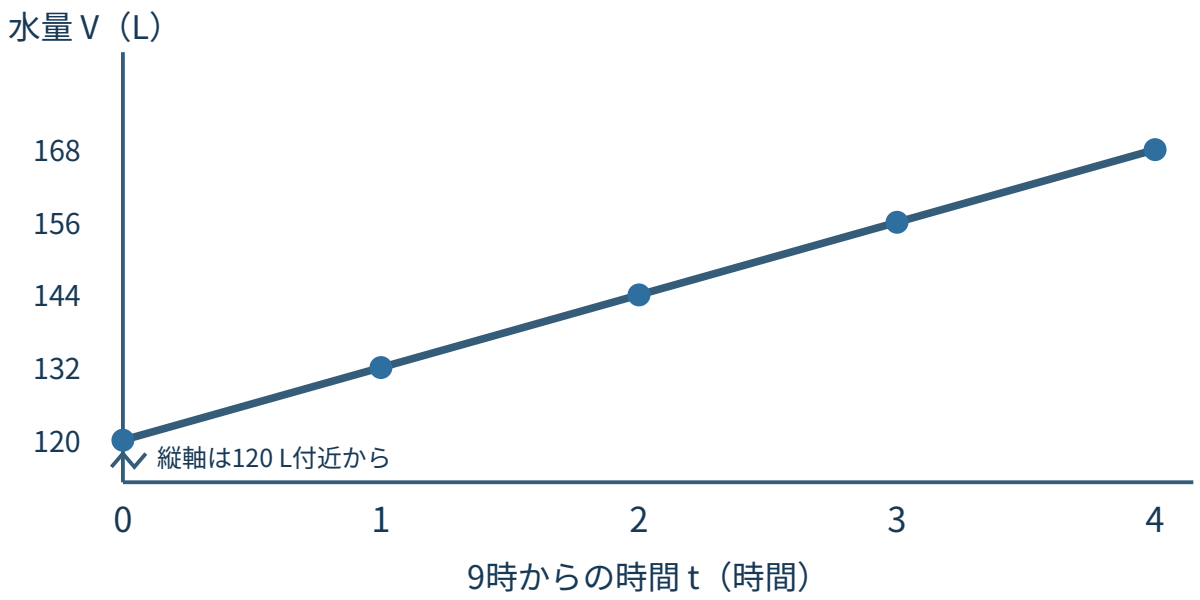
$$V = 120 + 12t \qquad (0 \le t \le 4)$$

である。1 時間ごとの値を表にすると次のようになる。

時刻	9 時	10 時	11 時	12 時	13 時
t（時間）	0	1	2	3	4
V（L）	120	132	144	156	168

表は各時刻の値を正確に読みやすい。式は、例えば 10 時 30 分のように表にない時刻でも扱える。グラフでは、点 $(0, 120)$ と $(4, 168)$ を結ぶ線分になり、水量が一定の割合で増えることが傾きから分かる。ここでは時間を連続量としているので、表の点の間も線で結ぶ。

©ミライコーチング



例題 1：三つの表現を対応させる

上のタンクについて答えよ。
(1) 10 時 30 分の水量を求めよ。
(2) 水量が 150 L になる時刻を求めよ。
(3) 200 L の容量を超えないことを、式とグラフの範囲の両方から説明せよ。

例題 1 の解答・解説

(1) 10 時 30 分は $t = 1.5$ なので、$V = 120 + 12 \times 1.5 = 138$ より 138 L である。表にない時刻には式が便利である。
(2) $120 + 12t = 150$ を解くと $t = 2.5$ である。したがって 11 時 30 分である。
(3) 式では $0 \le t \le 4$ で V は増加し、最大値は $t = 4$ のときの 168 L である。グラフでも線分の最も高い点は $(4, 168)$ であり、200 L を下回る。よってこの時間帯には容量を超えない。

3. 図で分け、表で漏れを防ぎ、式で数える

1 辺 4 cm の正方形の中に、各辺から 1 cm 内側の位置へ縦 2 本、横 2 本の線を引き、中央に 1 辺 2 cm の正方形を作る。中央の正方形だけを色付きにすると、その面積は図から $2 \times 2 = 4$ cm^2 と見通せる。一方、同じ正方形を別に 1 辺 1 cm の小正方形 16 個へ分けた表で表すと、色付き 4 個、色なし 12 個であり、数え漏れを確認しやすい。
色付き部分の割合を p とすると、式では

$$p = \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{4}$$

と簡潔に表せる。図は形、表は個数、式は割合をそれぞれ明確にする。

例題 2：図・表・式を役割分担させる

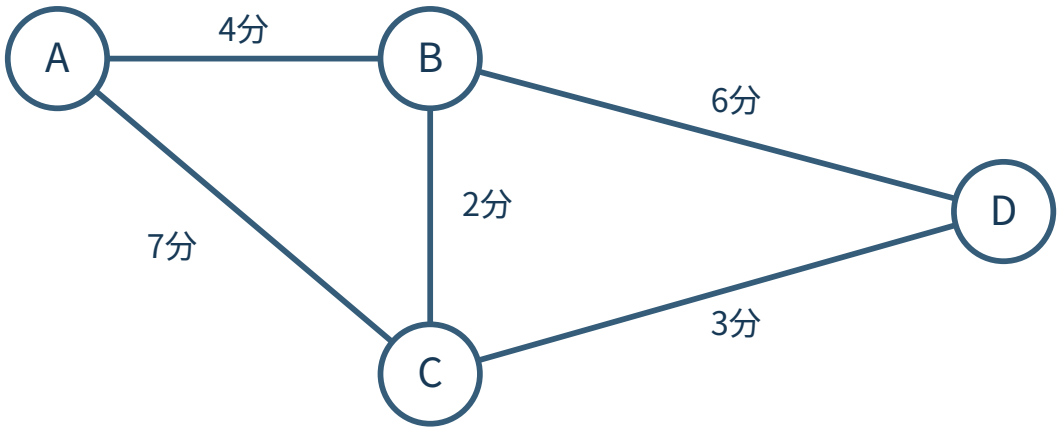
縦 3 cm、横 5 cm の長方形を 1 cm 四方のます目に分け、左から 2 列を色付きにする。
(1) 色付きと色なしの 1 cm 四方の個数を求めよ。
(2) 色付き部分の面積の割合を式で求めよ。
(3) この問題で、図と式はそれぞれ何の確認に向くか述べよ。

例題 2 の解答・解説

(1) 色付きは $3 \times 2 = 6$ 個、色なしは $3 \times 3 = 9$ 個である。
(2) 色付きの面積は $3 \times 2 = 6$ cm^2、全体は $3 \times 5 = 15$ cm^2 なので、割合は $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ である。
(3) 図は「左から 2 列」という位置と形の確認に向く。式は面積や割合を正確に計算し、約分するのに向く。

4. 経路図で候補を見つけ、表と式で比較する

地点 A から D へ移動する道路を考える。道路と所要時間は、A—B が 4 分、A—C が 7 分、B—C が 2 分、B—D が 6 分、C—D が 3 分である。道路はどちら向きにも通れ、同じ地点を二度通らない経路だけを比べる。



経路図は、つながっていない地点を誤って結ぶことを防ぎ、候補を見つけやすくする。候補を表に移すと、合計の比較が明確になる。

経路	計算	所要時間
A—B—D	$4 + 6$	10 分
A—C—D	$7 + 3$	10 分
A—B—C—D	$4 + 2 + 3$	9 分
A—C—B—D	$7 + 2 + 6$	15 分

したがって最短経路は A—B—C—D で、9 分である。図だけで線の長さを比べてはいけない。図上の長さは所要時間の尺度として描かれていないからである。
道路の有無だけを確認するときは、頂点順を A、B、C、D とした行列

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

も補助になる。例えば第 1 行から A は B、C とだけ直接つながると分かる。ただし、この 0 と 1 の行列には所要時間が入っていないので、これだけで最短時間は決められない。

例題 3：経路を複数の表現で調べる

上の道路について答えよ。
(1) B から D へ、同じ地点を二度通らずに行く経路をすべて挙げ、所要時間を求めよ。
(2) B から D への最短経路を答えよ。
(3) 行列 M の第 2 行と、経路図から分かることの対応を説明せよ。

例題 3 の解答・解説

(1) B—D は 6 分、B—C—D は $2+3=5$ 分、B—A—C—D は $4+7+3=14$ 分、B—C—A は D へ続かないので経路にならない。したがって該当する経路は三つである。
(2) B—C—D の 5 分である。
(3) 第 2 行は $(1,0,1,1)$ である。列を A、B、C、D の順に読むと、B は A、C、D と直接つながり、自分自身 B との道路は考えないことを表す。これは経路図で B から出る 3 本の道路と一致する。

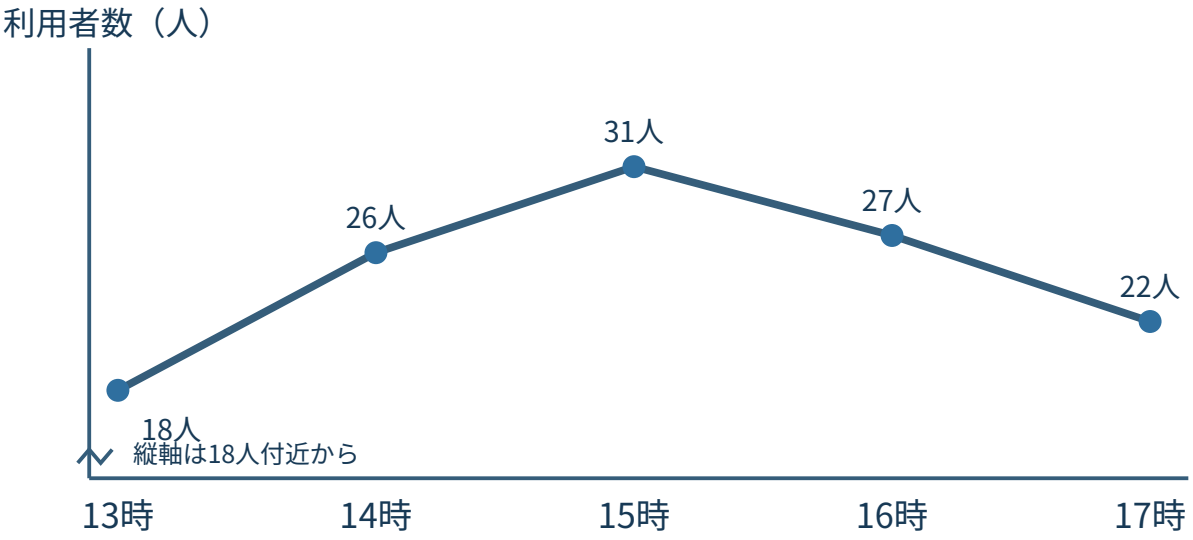
5. 表からグラフを選び、式で判断を確定する

ある自習室の利用者数を 1 時間ごとに調べた。これは各時刻で数えた離散的な観測値であり、観測していない時刻の人数までは分からない。

時刻	13 時	14 時	15 時	16 時	17 時
利用者数（人）	18	26	31	27	22

時間に沿った増減を見るには、横軸を時刻、縦軸を人数とする折れ線グラフが向く。ただし、点の間を結ぶ線は変化の傾向を見やすくする補助であり、例えば 14 時 30 分が必ず 28.5 人だったという意味ではない。人数は整数で、途中の実測値もないからである。

©ミライコーチング



隣り合う観測時刻の増減を式で計算すると、$+8, +5, -4, -5$ 人である。グラフで「15 時を境に減少へ変わる」と見通し、差の計算で確かめられる。

例題 4：グラフの読みを差で確かめる

上の利用者数について答えよ。
(1) 観測値が最大である時刻と人数を答えよ。
(2) 13 時から 15 時までの観測値の増加人数と、15 時から 17 時までの減少人数を求めよ。
(3) 「14 時 30 分の利用者は 28.5 人である」と断定できない理由を述べよ。

例題 4 の解答・解説

(1) 15 時の 31 人である。
(2) $31 - 18 = 13$ より 13 人増え、$31 - 22 = 9$ より 9 人減った。
(3) 表は 1 時間ごとの観測値だけを示し、時刻の間で一定の割合で変化するという条件はない。また人数は整数である。したがって、折れ線上の値を実測値として断定できない。

演習問題

問題 1：表と式をつなぐ

午前 8 時に 80 L 入っている容器へ、正味で 1 時間に 15 L ずつ水が増える。8 時から 12 時まで割合は一定とする。8 時から t 時間後の水量を W L として、(1) W を t の式で表せ。(2) 10 時 20 分の水量を求めよ。(3) 140 L になる時刻を求めよ。

問題 2：図と式で割合を求める

縦 4 cm、横 6 cm の長方形を 1 cm 四方のます目に分け、上から 1 行と左から 1 列を色付きにする。重なりは 1 回だけ数える。(1) 色付きのますの個数を求めよ。(2) 色付き部分の面積の割合を求めよ。

問題 3：経路を比較する

上の A、B、C、D の道路で、A—C の所要時間だけを 5 分に変更する。他の条件は同じとする。A から D への経路をすべて比較し、最短経路と所要時間を答えよ。

問題 4：行列を図の確認に使う

頂点順を P、Q、R、S とする向きのない単純グラフの隣接行列が

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。(1) 辺をすべて答えよ。(2) P から R へ、同じ頂点を二度通らず、辺 2 本で行く経路をすべて答えよ。

問題 5：離散的な観測値を読む

ある駅の改札通過人数を 10 分ごとに数えたところ、8 時 00 分、8 時 10 分、8 時 20 分、8 時 30 分、8 時 40 分の順に 42 人、55 人、63 人、58 人、51 人であった。(1) 観測値が最大の時刻を答えよ。(2) 隣り合う観測時刻の人数の差を順に求めよ。(3) 8 時 15 分の人数を 59 人と断定できるか、理由とともに答えよ。

問題 6：表現を選ぶ

次の目的に最も直接役立つ表現を、図・表・式・グラフ・行列から一つずつ選び、理由を述べよ。(1) 1 時間ごとの気温の変化の全体像を見る。(2) 多数の生徒について三つの講座の受講の有無を 0 と 1 で整理する。(3) 縦 a cm、横 b cm の長方形の面積を一般的に表す。

演習問題の解答・解説

問題 1 の解答・解説

(1) $W = 80 + 15t \ \ (0 \le t \le 4)$ である。(2) 10 時 20 分は $t = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ なので、$W = 80 + 15 \times \frac{7}{3} = 115$ より 115 L である。(3) $80 + 15t = 140$ より $t = 4$ なので 12 時である。

問題 2 の解答・解説

(1) 上の 1 行に 6 個、左の 1 列に 4 個あるが左上の 1 個が重なるので、$6 + 4 - 1 = 9$ 個である。(2) 全体は $4 \times 6 = 24 \ \ \mathrm{cm}^2$、色付きは $9 \ \ \mathrm{cm}^2$ なので、割合は $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ である。図で重なりを確認し、式で二重に数えた 1 個を引く。

問題 3 の解答・解説

A—B—D は $4 + 6 = 10$ 分、A—C—D は $5 + 3 = 8$ 分、A—B—C—D は $4 + 2 + 3 = 9$ 分、A—C—B—D は $5 + 2 + 6 = 13$ 分である。したがって最短経路は A—C—D で、8 分である。

©ミライコーチング

問題 4 の解答・解説

(1) 1 の位置を重複なく読むと、辺は PQ、PS、QR、RS である。(2) P―Q―R と P―S―R の二つである。行列の第 1 行から P の隣は Q、S であり、それぞれが R とつながることを確認できる。

問題 5 の解答・解説

(1) 8 時 20 分の 63 人である。(2) 順に $55-42=13$、$63-55=8$、$58-63=-5$、$51-58=-7$ より、$+13, +8, -5, -7$ 人である。(3) 断定できない。10 分ごとの観測値しかなく、その間に一定の割合で変化したという条件がないからである。

問題 6 の解答・解説

(1) グラフである。時刻に沿う上昇・下降や全体の傾向を見やすい。(2) 行列である。生徒を行、講座を列と決めれば、多数の 0 と 1 を同じ形式で整理できる。(3) 式である。$ab\ \mathrm{cm}^2$ と書けば、辺の長さが変わっても成り立つ一般的な関係を簡潔に表せる。

©ミライコーチング