

第 148 講 等差型の漸化式

学習目標

- ・ 等差型の漸化式の意味を理解する
- ・ 更新回数から一般項を求める
- ・ 初期条件と漸化式を満たすか確認する

等差型の漸化式とは何か

本講では、 n は正整数、初項 a_1 と一定差 d は実数であり、全正整数 n で更新式が成り立つものとして考える。

数列の隣合う項の変化が一定であるとき、その更新は同じ量を何度も加える形になる。

等差型の漸化式とは、 $a_{n+1} = a_n + d$

で表される漸化式である。ここで、 d は n によらない実定数であり、正、負、0、分数のいずれでもよい。

この式は「次の項は、現在の項に一定の変化量 d を 1 回加えたもの」と読むことができる。

重要なのは、初項から n 番目の項へ進むとき、更新する回数が $n - 1$ 回になることである。

例えば、

n	更新回数	値
1	0	a_1
2	1	$a_1 + d$
3	2	$a_1 + 2d$
4	3	$a_1 + 3d$

となる。

$n = 1$ のときは更新回数が 0 回なので、加える量がなく初項 a_1 そのものになる。この考え方から、一般項を求められる。

等差型の一般項

$a_{n+1} = a_n + d$ のとき、 n 番目の項は次の式で表される。

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

この式では、 d を $n - 1$ 回加えている。 $a_1 + nd$ とすると加える回数が 1 回多くなるため注意する。

一般項の導出

漸化式を順に使うと、

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + d \\a_3 &= a_2 + d \\&= a_1 + 2d \\a_4 &= a_3 + d \\&= a_1 + 3d\end{aligned}$$

となる。

初項から n 番目まででは、更新が $n - 1$ 回行われるため、 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ となる。

この見方を使うと、項の番号ではなく「何回変化したか」を考えることで、等差型の漸化式を判断できる。

注意

- d は一定の変化量、 n は項の番号であり役割が異なる。偶然 d と n の数値が一致する場合もあるため、必ず別の値であるとは考えない。
- $a_1 + nd$ は更新回数を 1 回多く数えた式である。
- 差が n によって変化する式は、一定の差 d を持つ等差型ではない。
- 初項 a_1 が与えられず、漸化式だけが与えられた場合、数列は 1 つに定まらない。

候補の一般項を確認する方法

ある式を一般項の候補として考える場合は、次の 2 点を確認する。

1. $n = 1$ を代入して初項 a_1 になるか確認する。
2. 任意の正整数 n で、 $a_{n+1} = a_n + d$ を満たすか確認する。

この 2 つを満たせば、その式は等差型の漸化式に対応する一般項である。

例題 1

数列 $\{a_n\}$ が

$a_1 = 3$ 、 $a_{n+1} = a_n + 5$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

例題 1 の解答・解説

漸化式から、1 回の更新で 5 を加える数列であることが分かる。

初項は $a_1 = 3$ 、差は $d = 5$ なので、等差型の一般項

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ を使う。

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n - 1)5 \\ &= 5n - 2 \end{aligned}$$

となる。

確認すると、 $n = 1$ では $a_1 = 3$ となり、また

$a_{n+1} = 5(n + 1) - 2 = 5n + 3$ である。

一方、 $a_n + 5 = (5n - 2) + 5 = 5n + 3$ なので、 $a_{n+1} = a_n + 5$ を満たす。

したがって、一般項は $a_n = 5n - 2$ である。

例題 2

数列 $\{a_n\}$ が

$a_1 = 10$ 、 $a_{n+1} = a_n - 4$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

例題 2 の解答・解説

今回は 1 回の更新で 4 を引くため、差は $d = -4$ である。

等差型の一般項より、 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ であるから、

$$\begin{aligned} a_n &= 10 + (n - 1)(-4) \\ &= 14 - 4n \end{aligned}$$

となる。

初項 10 に変化量 -4 を $n - 1$ 回加えると考える。

確認すると、 $a_{n+1} = 14 - 4(n + 1) = -4n + 10$ であり、 $a_n - 4 = (14 - 4n) - 4 = -4n + 10$ なので漸化式を満たす。

したがって、一般項は $a_n = 14 - 4n$ である。

また、 $a_1 = 14 - 4 = 10$ となり、初期条件も満たす。

例題 3

数列 $\{a_n\}$ が

$a_1 = 2$ 、 $a_4 = 8$ を満たし、隣り合う項の差が一定である。この数列の一般項 a_n を求めよ。

例題 3 の解答・解説

差を d とおくと、等差型の一般項は $a_n = 2 + (n - 1)d$ である。

$n = 4$ のとき、

$$\begin{aligned} a_4 &= 2 + (4 - 1)d \\ 8 &= 2 + 3d \end{aligned}$$

より、 $3d = 6$ なので、 $d = 2$ となる。

したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n - 1)2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

である。

確認すると、 $a_1 = 2$ となり、 $a_{n+1} = 2(n + 1) = 2n + 2$

また、 $a_n + 2 = 2n + 2$ なので、更新量は常に 2 である。

したがって、一般項は $a_n = 2n$ である。

また、 $a_4 = 2 \cdot 4 = 8$ となり、もう一方の既知条件も満たす。

演習問題

練習問題 1

数列 $\{a_n\}$ が

$a_1 = 7$ 、 $a_{n+1} = a_n + 3$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

練習問題 2

数列 $\{a_n\}$ が

$a_1 = -2$ 、 $a_{n+1} = a_n - 5$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

練習問題 3

数列 $\{a_n\}$ が等差型であり、 $a_3 = 9$ 、差が4であるとき、一般項 a_n を求めよ。

練習問題 4

数列 $\{a_n\}$ が等差型であり、 $a_5 = 1$ 、 $a_2 = 10$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

練習問題 5

次の数列が等差型の更新

$$a_{n+1} = a_n + d$$

で表されるか判定し、表される場合は d を求めよ。

$$a_n = n^2 + 2n + 1$$

練習問題 6

次の数列が等差型の更新

$$a_{n+1} = a_n + d$$

で表されるか判定し、表される場合は d を求めよ。

$$a_n = 5$$

練習問題 7

実数 A, d に対し、初項 $a_1 = A$ 、全正整数 n で

$$a_{n+1} = a_n + d$$

と定めた数列 $\{a_n\}$ を考える。

候補

$$c_n = A + nd$$

がこの数列の一般項に一致するための d の条件を求め、その理由を述べよ。

練習問題 8

数列 $\{a_n\}$ が

$a_1 = 6$ 、 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

また、 $a_n = a_1 + nd$ とした場合に正しい一般項になるか確認せよ。

練習問題 1 の解答・解説

差は $d = 3$ であり、初項は $a_1 = 7$ である。
等差型の一般項より、

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n - 1)d \\&= 7 + 3(n - 1) \\&= 3n + 4\end{aligned}$$

となる。

確認すると、 $n = 1$ で $a_1 = 7$ となる。

また、 $a_{n+1} = 3(n + 1) + 4 = 3n + 7$ であり、 $a_n + 3 = (3n + 4) + 3 = 3n + 7$ なので更新式も満たす。
したがって、一般項は $a_n = 3n + 4$ である。

練習問題 2 の解答・解説

1 回の更新で 5 を引くので、差は $d = -5$ である。

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n - 1)d \\&= -2 + (n - 1)(-5) \\&= 3 - 5n\end{aligned}$$

となる。

確認すると、 $a_1 = 3 - 5 = -2$ である。

また、 $a_{n+1} = 3 - 5(n + 1) = -5n - 2$

と、 $a_n - 5 = (3 - 5n) - 5 = -5n - 2$

が一致する。

したがって、一般項は $a_n = 3 - 5n$ である。

練習問題 3 の解答・解説

差を $d = 4$ とする。

a_3 は、 $a_3 = a_1 + 2d$ であるから、

$$\begin{aligned}9 &= a_1 + 2 \cdot 4 \\a_1 &= 1\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + (n - 1)4 \\&= 4n - 3\end{aligned}$$

である。

確認すると、 $a_3 = 12 - 3 = 9$ であり、 $a_{n+1} = 4(n + 1) - 3 = 4n + 1$

また、 $a_n + 4 = (4n - 3) + 4 = 4n + 1$ なので条件を満たす。

練習問題 4 の解答・解説

差を d とする。

2 番目から 5 番目までは 3 回更新するので、 $a_5 = a_2 + 3d$ である。

したがって、

$$\begin{aligned}1 &= 10 + 3d \\3d &= -9 \\d &= -3\end{aligned}$$

となる。

a_2 から初項へ戻すと、 $a_2 = a_1 + d$ なので、 $10 = a_1 - 3$ より、 $a_1 = 13$ である。

したがって、

$$\begin{aligned}a_n &= 13 + (n - 1)(-3) \\&= 16 - 3n\end{aligned}$$

となる。

確認すると、 $a_2 = 16 - 6 = 10$

および

$a_5 = 16 - 15 = 1$ である。

また、 $a_{n+1} = 16 - 3(n + 1) = 13 - 3n$

と、 $a_n - 3 = (16 - 3n) - 3 = 13 - 3n$

が一致する。

練習問題 5 の解答・解説

差を調べるために、隣り合う項の差を考える。

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= ((n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1) - (n^2 + 2n + 1) \\&= 2n + 3\end{aligned}$$

となる。

差が n によって変化するため、一定の実定数 d ではない。

したがって、等差型の更新では表せない。

練習問題 6 の解答・解説

すべての項が5なので、 $a_{n+1} - a_n = 5 - 5 = 0$ である。

差は常に一定であり、 $d = 0$ となる。

したがって、これは等差型の更新で表される。

なお、差が0の場合は、 $a_n = a_1 + (n - 1)d$

と

$$a_n = a_1 + nd$$

がどちらも数値として同じ値になる。したがって、 $a_1 + nd$ を常に誤りと判断することはできない。

練習問題 7 の解答・解説

候補 c_n が一般項になるには、求める数列 $\{a_n\}$ と同じ初期条件と更新式を満たす必要がある。

まず、候補の初項を確認する。

$c_1 = A + d$ である。

求める数列の初項は $a_1 = A$ なので、初期条件が一致するためには、 $A + d = A$ より、 $d = 0$ である必要がある。

一方、候補の更新については、

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (A + (n+1)d) - (A + nd) \\ &= d \end{aligned}$$

となるため、更新式の差はどの d でも一定である。

したがって、更新式だけを見ると候補は条件を満たすが、初期条件も含めて考えると、必要十分条件は $d = 0$ である。

$d \neq 0$ の場合、 c_n は求める数列より常に 1 回分の変化量 d だけずれ、初項に一致しない。

等差型では初項から n 番目までの更新回数は $n - 1$ 回であるため、一般項は $a_1 + (n - 1)d$ となる。 $a_1 + nd$ は 1 回多く加えた形である。

ただし、 $d = 0$ の場合は 0 を余分に加えても値は変わらないため、この場合だけ数値として一致する。

したがって、 $c_n = A + nd$ が一般項に一致する条件は $d = 0$ である。

練習問題 8 の解答・解説

差は

$$d = \frac{1}{2}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ &= 6 + (n - 1)\frac{1}{2} \\ &= \frac{n + 11}{2} \end{aligned}$$

となる。

確認すると、

$$a_1 = \frac{1 + 11}{2} = 6$$

である。

また、

$$a_{n+1} = \frac{n + 12}{2}$$

と、

$$a_n + \frac{1}{2} = \frac{n + 11}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n + 12}{2}$$

が一致する。
さらに、

$$a_1 + nd = 6 + \frac{n}{2}$$

は、

$$\frac{n + 12}{2}$$

となり、正しい一般項より $\frac{1}{2}$ 大きい。
したがって、この場合は $a_1 + nd$ は正しい一般項ではない。