第 189 講 三角関数の微分

学習目標

この講では、三角関数の微分公式を根拠から理解し、基本的な微分計算へ利用できるようになることを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- $\sin x$、$\cos x$ の微分公式を差商と加法定理から導ける。
- $\tan x$ の微分公式を商の微分を利用して導ける。
- 合成関数の微分を利用して $\sin u(x)$、$\cos u(x)$、$\tan u(x)$ を微分できる。
- $\sin^2 x$ と $\sin(x^2)$ の違いを理解し、内側の変化を考えて微分できる。

三角関数を微分する意味

微分は、関数の値そのものではなく、入力が少し変化したときの出力の変化の割合を調べる操作である。
本講では、x と増分 h を実数とし、角はすべてラジアンで考える。$\sin x$ と $\cos x$ は実数全体で定義され、各点で微分可能である。また、$\tan x$ は $\cos x \neq 0$ となる点で考える。
三角関数の微分では、角の変化と高さの変化の関係を見ることが重要である。ラジアンでは円弧の長さと半径の比で角を表すため、微分の変化量と自然につながる。

微分係数と差商

実数値関数 f が点 x を含む開区間で定義されているとする。0 でない実数 h を 0 に近づけたとき、差商の極限が有限の実数として存在するならば、f は点 x で微分可能であるという。その極限の値を点 x における微分係数という。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この定義を用いて、三角関数の微分公式を導く。

$\sin x$ の微分

$y = \sin x$ の微分を考える。
差商を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

ここでは加法定理 $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$ を用いた。
$h \neq 0$ のとき、半角公式を使うと次の等式が成り立つ。

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -\sin \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$h \to 0$ のとき、$\sin\left(\frac{h}{2}\right) \to 0$ であり、$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \to 1$ であるため、$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ である。
さらに、$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ であるため、差商の極限は $\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$ となる。
したがって、導関数は $(\sin x)' = \cos x$ である。

©ミライコーチング

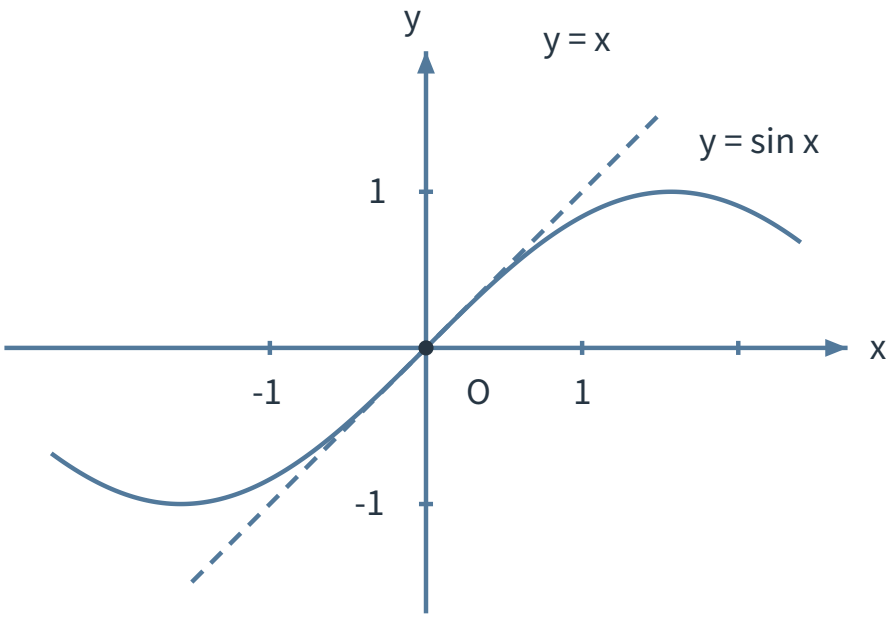

図 1　角はラジアン。実線は $y = \sin x$、破線は原点 $O(0,0)$ における接線 $y = x$ である。原点での傾きは $\cos 0 = 1$ となる。

この図では、$y = \sin x$ の原点付近の変化を見る。$x = 0$ では $\sin 0 = 0$ であり、傾きは $\cos 0 = 1$ であるため、原点における接線は $y = x$ になる。

$\sin x$ の微分で見る値と傾き

$\sin x$ の値と、その点での傾きは同じものではない。
$y = \sin x$ では、各点の傾きが $\cos x$ で表される。つまり、関数の高さを表す値と、変化の速さを表す値は別の三角関数で表される。

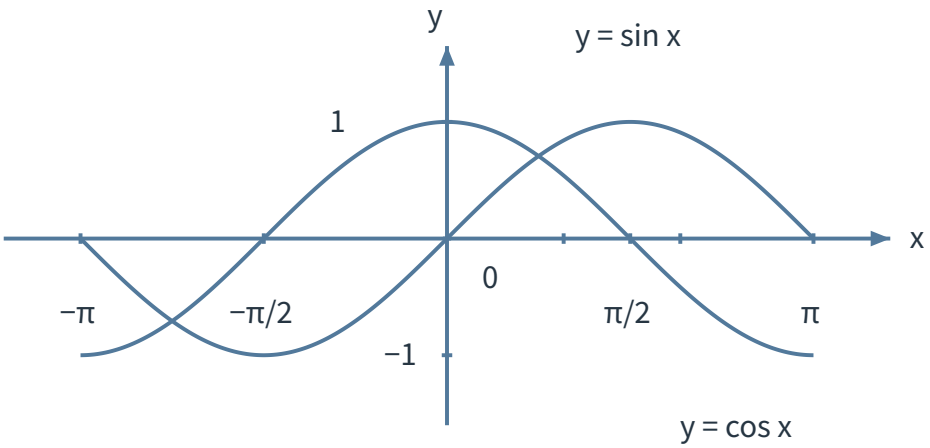

図 2　角はラジアン。元の関数 $y = \sin x$ と、その各点の接線の傾きを表す導関数 $y = \cos x$ を同じ座標に示す。$x = 0$ では傾きが 1、$x = \pm\frac{\pi}{2}$ では傾きが 0 となる。図の曲線は $-\pi \leq x \leq \pi$ の部分を表示している。

例えば、$x = 0$ では $\sin 0 = 0$ であるが傾きは $\cos 0 = 1$ である。一方、$x = \frac{\pi}{2}$ では $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ であるが傾きは $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ である。

$\cos x$ の微分

$y = \cos x$ の微分を考える。
差商を次のように変形する。

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$
$$= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}$$

ここでは加法定理 $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ を用いた。
先ほど示した $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ と $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ を利用すると、差商の極限は $\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$ となる。
したがって、導関数は $(\cos x)' = -\sin x$ である。

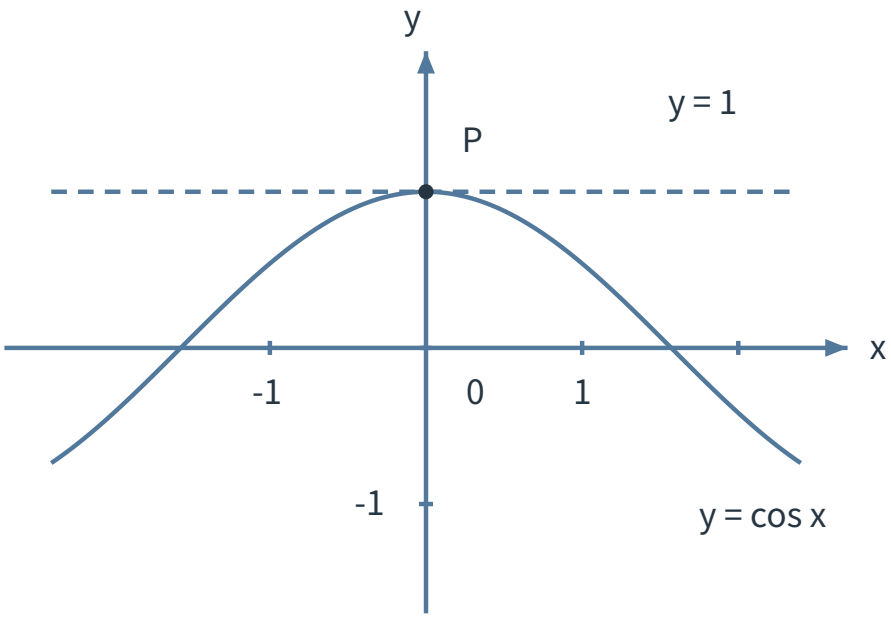

図 3　角はラジアン。実線は $y=\cos x$、破線は点 $P(0,1)$ における水平な接線 $y=1$ である。この点での傾きは $-\sin 0=0$ となる。

この図では、$y=\cos x$ の $x=0$ 付近の変化を見る。$x=0$ では $\cos 0=1$ であり、傾きは $-\sin 0=0$ であるため、点 $(0,1)$ における接線は水平な直線 $y=1$ になる。

三角関数の基本的な微分公式

三角関数の基本公式は、$(\sin x)'=\cos x$、$(\cos x)'=-\sin x$、$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ である。
$\tan x$ の公式は $\cos x\neq 0$ の点で成立する。

$\tan x$ の微分

$\tan x$ は $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ と表せるため、商の微分を利用する。

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

三角関数の基本関係 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ を使うと、導関数は $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ である。

合成関数の微分

$u(x)$ が考えている点で微分可能であるとき、三角関数の中身が x 以外の関数になる場合は、外側の関数の変化だけでなく内側の関数の変化も考える必要がある。

$u(x)$ が考えている点で微分可能であるとき、$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$ である。
$u(x)$ が考えている点で微分可能であるとき、$(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$ である。
$u(x)$ が考えている点で微分可能であり、さらに $\cos(u(x)) \neq 0$ であるとき、$(\tan u(x))' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$ である。
例えば、$\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ を意味するため、積の微分または合成関数の考え方から $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$ となる。一方、$\sin(x^2)$ は角が x^2 になった三角関数であるため、$(\sin(x^2))' = 2x\cos(x^2)$ となる。
この 2 つは似た形に見えるが、変化している部分が異なるため、微分結果も異なる。
度数法で微分すると、ラジアンへの変換による係数が加わる。例えば、$g(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right)$ とおくと、合成関数の微分により $g'(t) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi t}{180}\right)$ となる。このため、三角関数の微分公式はラジアンを前提にした形で覚える必要がある。

三角関数の微分で注意すること

三角関数の微分では、次の点に注意する。
- 微分公式はラジアンで成立する。
- 関数の値と導関数の値を混同しない。
- 合成関数では内側の導関数を忘れない。
- $\sin^2 x$ と $\sin(x^2)$ は別の関数である。

例題 1

$y = \sin x$ を微分しなさい。

例題 1 の解答・解説

$\sin x$ の微分公式を用いる。
したがって、導関数は $y' = \cos x$ である。

例題 2

$y = \cos x + \sin x$ を微分しなさい。

例題 2 の解答・解説

和の微分では、それぞれの項を別々に微分する。
$\cos x$ の微分は $-\sin x$ であり、$\sin x$ の微分は $\cos x$ である。
したがって、導関数は $y' = -\sin x + \cos x$ である。

例題 3

$y = \tan x$ を微分しなさい。ただし、$\cos x \neq 0$ とする。

例題 3 の解答・解説

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ であるため、商の微分を利用する。
商の微分から、$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ となる。
さらに、$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を用いると、導関数は $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ である。

©ミライコーチング

演習問題

練習問題 1

$y = 3\sin x - 2\cos x$ を微分しなさい。

練習問題 2

$y = \sin(3x - 1)$ を微分しなさい。

練習問題 3

$y = \cos(x^2)$ を微分しなさい。

練習問題 4

次の 2 つの関数をそれぞれ微分し、違いを説明しなさい。
(1) $y = \sin^2 x$
(2) $y = \sin(x^2)$

練習問題 5

$y = x\sin x$ を微分しなさい。

練習問題 6

$y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ を微分しなさい。ただし、$1 + \cos x \neq 0$ とする。

練習問題 7

$f(x) = \cos x$ について、$x = \frac{\pi}{3}$ における関数の値と微分係数を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒が $y = \sin(2x)$ の微分について「$y' = \cos(2x)$ である」と答えた。この答えが誤っている理由を説明し、正しい導関数を求めなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

定数倍の微分と和の微分を利用する。
$3\sin x$ の微分は $3\cos x$ であり、$-2\cos x$ の微分は $2\sin x$ である。
したがって、導関数は $y' = 3\cos x + 2\sin x$ である。

練習問題 2 の解答・解説

外側の関数 $\sin u$ と内側の関数 $u = 3x - 1$ に分けて考える。
$\sin u$ の微分は $\cos u$ であり、内側の導関数は $(3x-1)' = 3$ である。
したがって、導関数は $y' = 3\cos(3x-1)$ である。

練習問題 3 の解答・解説

外側の関数を $\cos u$、内側の関数を $u = x^2$ と考える。
$\cos u$ の微分は $-\sin u$ であり、内側の導関数は $(x^2)' = 2x$ である。
したがって、導関数は $y' = -2x\sin(x^2)$ である。

練習問題 4 の解答・解説

(1) $y = \sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ を意味する。
外側を 2 乗、内側を $\sin x$ と考えると、合成関数の微分より $y' = 2\sin x\cos x$ である。
(2) $y = \sin(x^2)$ は角そのものが x^2 になっている関数である。
内側の導関数は $(x^2)' = 2x$ であるため、$y' = 2x\cos(x^2)$ である。
2 つの関数は見た目が似ているが、変化している部分が異なるため、微分結果も異なる。

練習問題 5 の解答・解説

$y = x\sin x$ は 2 つの関数の積であるため、積の微分を用いる。
積の微分より、$y' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x$ である。
したがって、導関数は $y' = \sin x + x\cos x$ である。

練習問題 6 の解答・解説

$1 + \cos x \neq 0$ の範囲では、分母が 0 にならないため商の微分を利用できる。

$$y' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

分子を整理すると、$\cos x(1+\cos x) + \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 1 + \cos x$ である。
したがって、導関数は $y' = \frac{1}{1+\cos x}$ である。

練習問題 7 の解答・解説

まず、関数の値を求める。
$x = \frac{\pi}{3}$ を代入すると、$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ である。
次に、微分係数を求める。
$(\cos x)' = -\sin x$ であるため、$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。
したがって、$x = \frac{\pi}{3}$ における関数の値は $\frac{1}{2}$、微分係数は $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、関数の高さと変化の割合は異なる値になる。

練習問題 8 の解答・解説

生徒の答えでは、内側の関数 $2x$ の変化を考えていない点が誤りである。
$\sin(2x)$ は外側の関数を $\sin u$、内側の関数を $u = 2x$ と考える。
内側の導関数は $(2x)' = 2$ であるため、導関数は $y' = 2\cos(2x)$ である。
したがって、合成関数の微分では外側の微分だけでなく、内側の導関数を掛ける必要がある。

©ミライコーチング