第 214 講 対称性を利用した定積分

学習目標

この講では、対称な位置にある 2 点の関数値を組にし、定積分を簡単にする考え方を身に付ける。

- 偶関数と奇関数を、$f(-x)$ と $f(x)$ の関係から判定できる。
- 対称区間における偶関数と奇関数の定積分の性質を、置換積分から説明できる。
- 一般の区間で、x と $a+b-x$ を組にする反射公式を使うことができる。
- 区間の中央に関する対称性や反対称性を見抜き、定積分を簡単にできる。
- 関数が区間全体で定義されていることや、積分区間が適切に対称であることを確認できる。

対称性は 2 点を組にする考え方である

定積分の対称性で見るべきものは、グラフの片側だけではない。区間の中央から等しい距離にある 2 点を組にし、その 2 点での関数値が等しいか、反対符号か、一定の和になるかを調べる。
原点について対称な区間では、点 $-x$ と点 x が組になる。2 つの関数値が等しければ同じ寄与が 2 回現れ、反対符号なら互いに打ち消し合う。この関係を、置換積分によって式へ移す。



図 1　対称区間$[-3,3]$で原点から等距離にある$-x=-2$と$x=2$

数直線上の -2 と 2 は原点から等しい距離にある。この位置関係が、$f(-x)$ と $f(x)$ を比較する入口になる。

本講で対称性を使うための十分条件

原点について対称な区間を扱うときは、実数 $h>0$ とし、関数 f は閉区間 $[-h,h]$ 全体で連続であるとする。
一般の区間を扱うときは、実数 $a<b$ とし、関数 f は閉区間 $[a,b]$ 全体で連続であるとする。
これらは、本講で通常の定積分と置換積分を安全に用いるための十分条件である。定積分が存在するための必要条件を述べたものではない。問題では、式の形だけでなく、関数が積分区間全体で定義されていることも確認する。

左半分を右半分へ移す

$[-h,h]$ を 0 で分ける。左半分の定積分で $x=-t$ と置くと、$dx=-dt$ であり、端点は $x=-h$ のとき $t=h$、$x=0$ のとき $t=0$ となる。

$$\int_{-h}^{0} f(x)\,dx = \int_{h}^{0} f(-t)(-dt)$$

$$= \int_{0}^{h} f(-t)\,dt$$

したがって、区間全体の定積分は次の形になる。

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{0}^{h} \{f(-x) + f(x)\}\,dx$$

左半分を右半分へ反射すると、対称な 2 点の関数値の和が現れる。偶関数と奇関数の公式は、この 1 本の式から生まれる。

偶関数と奇関数

原点について対称な定義域で、すべての x に対して $f(-x) = f(x)$ が成り立つ関数を偶関数という。グラフは y 軸について対称である。
すべての x に対して $f(-x) = -f(x)$ が成り立つ関数を奇関数という。グラフは原点について対称である。

偶関数では左右が同じ値になる

偶関数では $f(-x) = f(x)$ であるため、対称な 2 点の関数値の和は $2f(x)$ になる。よって、次の式を得る。

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{h} f(x)\,dx$$

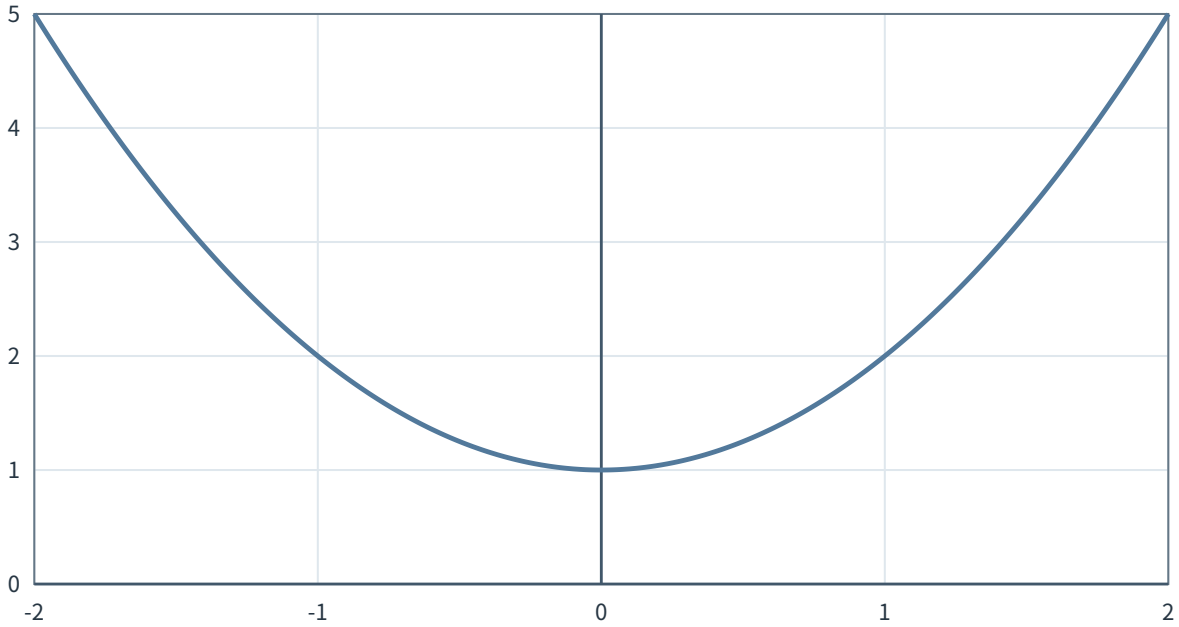

図 2　偶関数$f(x) = x^2 + 1$（実線）：$f(-x) = f(x)$でグラフはy軸対称

図の左右で高さが等しいため、左半分の定積分と右半分の定積分が等しくなる。半区間の定積分を 2 倍するのは、この等しさを式にしたものである。

奇関数では左右が打ち消し合う

奇関数では $f(-x) = -f(x)$ であるため、対称な 2 点の関数値の和は 0 になる。よって、次の式を得る。

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = 0$$

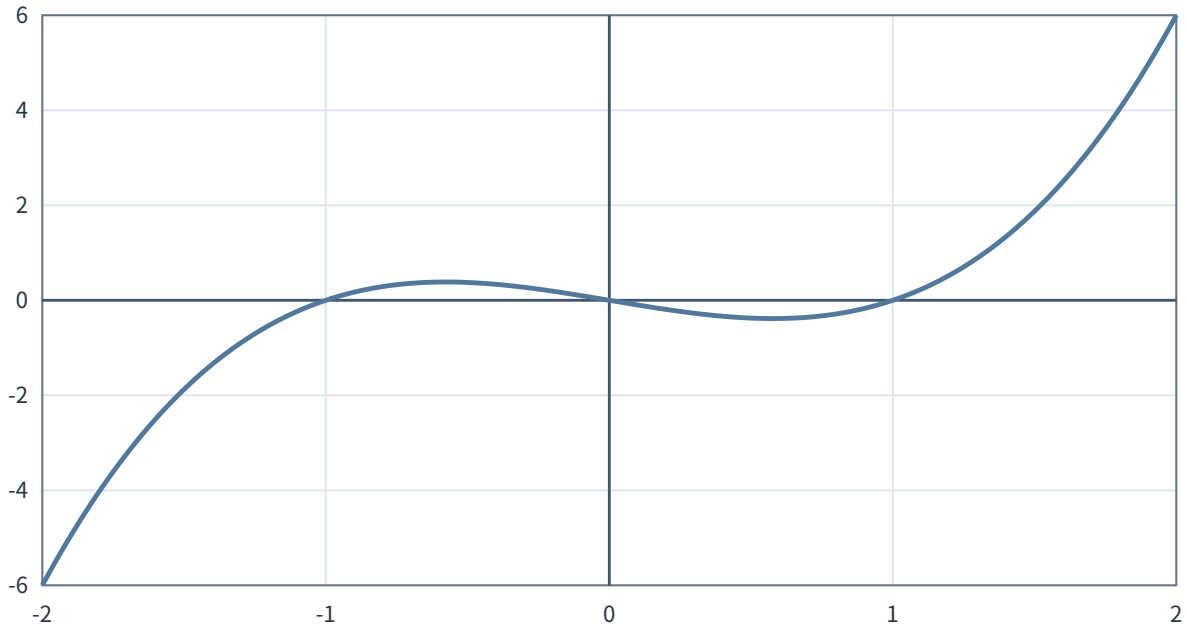

図 3　奇関数$g(x) = x^3 - x$（実線）：$g(-x) = -g(x)$でグラフは原点対称

定積分が 0 になる理由は、関数値がすべて 0 だからではない。原点から等距離にある 2 点の寄与が反対符号になり、区間全体で打ち消し合うからである。

偶奇性だけでなく区間も確認する

奇関数の定積分が 0 になるのは、積分区間が $[-h, h]$ のように原点について対称なときである。
奇関数であっても、区間が $[-1, 2]$ のように原点について対称でなければ、定積分が 0 になるとは限らない。
また、被積分関数に奇関数の項が 1 つ含まれるだけでは、関数全体を奇関数とはいえない。偶部分と奇部分が混ざっているときは、奇部分だけが対称区間で消える。

一般の区間では中央について反射する

区間 $[a, b]$ の中央を $m = \frac{a+b}{2}$ とする。点 x を中央について反射した点は $a + b - x$ である。例えば $[a, b] = [0, 6]$ では中央が 3 であり、1 を反射した点は 5 になる。

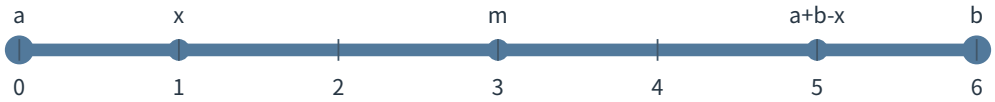

図 4　区間$[a,b]=[0,6]$で中央$m=3$について対応する$x=1$と$a+b-x=5$

$I=\int_a^b f(x)\,dx$ と置き、$t=a+b-x$ と置換する。$dx=-dt$ であり、端点は $x=a$ のとき $t=b$、$x=b$ のとき $t=a$ となる。

$$I=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)$$

$$=\int_a^b f(a+b-t)\,dt$$

積分変数を x と書き直せば、次の反射公式を得る。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

元の式と反射した式を加えると、次の関係になる。

$$2I=\int_a^b \{f(x)+f(a+b-x)\}\,dx$$

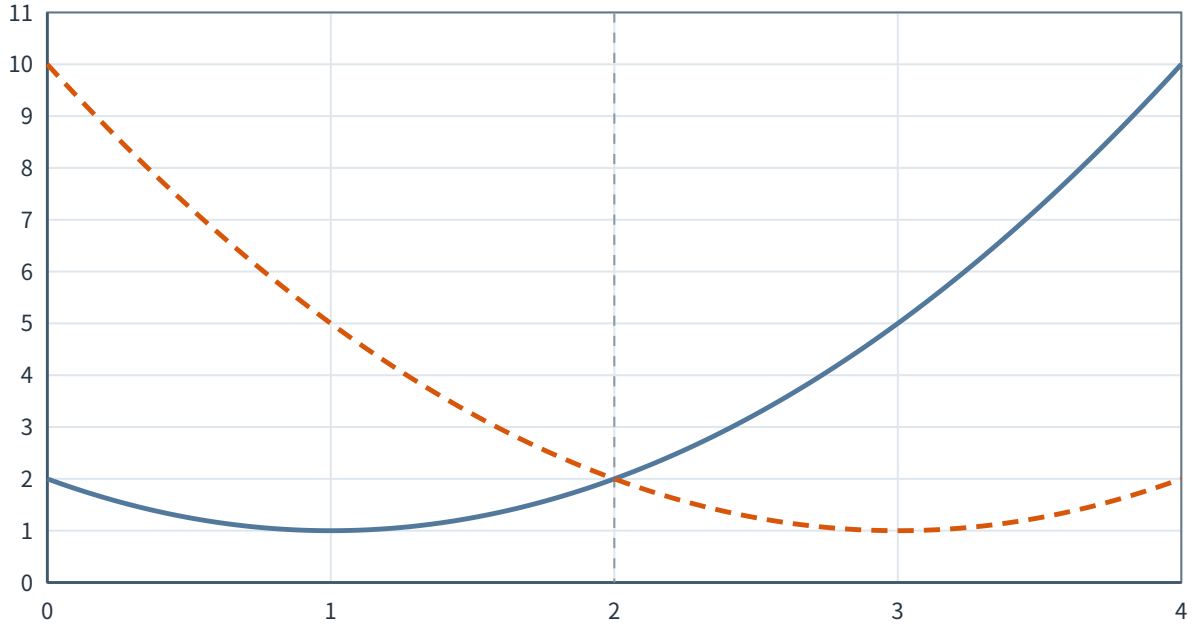

図 5　$[0,4]$の$f(x)=(x-1)^2+1$（実線）と$f(4-x)=(x-3)^2+1$（破線）は$x=2$について反射する

図では、実線を横方向に反射すると破線になる。形や高さは変わらず、区間内で左右の位置だけが入れ替わるため、2 つの定積分は等しい。

反射して足した後を見る

区間全体で $f(x)+f(a+b-x)=C$ が成り立つなら、反射して足した式の被積分関数が定数になる。

$$2I=\int_a^b C\,dx=C(b-a)$$

したがって、$I=\frac{C(b-a)}{2}$ である。
さらに、$f(a+b-x)=f(x)$ なら中央について対称であり、定積分は半区間の 2 倍になる。$f(a+b-x)=-f(x)$ なら中央について反対称であり、定積分は 0 になる。原点についての偶関数・奇関数は、$a=-h$、$b=h$ とした特別な場合である。

例題

例題 1：偶関数の定積分

次の定積分を、対称性を利用して求めよ。

$$\int_{-2}^{2}(x^2+1)\,dx$$

例題 1 の解答・解説

$f(x)=x^2+1$ とすると、次のように偶関数であることを確認できる。

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$$

積分区間は原点について対称であるため、右半分の定積分を 2 倍する。

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(x^2+1)\,dx&=2\int_{0}^{2}(x^2+1)\,dx\\&=2\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2\\&=2\left(\frac{8}{3}+2\right)\\&=\frac{28}{3}\end{aligned}$$

したがって、求める値は $\frac{28}{3}$ である。

例題 2：奇関数の定積分

次の定積分を、対称性を利用して求めよ。

$$\int_{-3}^{3}(x^5-2x^3+4x)\,dx$$

例題 2 の解答・解説

$g(x) = x^5 - 2x^3 + 4x$ とする。x を $-x$ に置き換えると、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^5 - 2(-x)^3 + 4(-x) \\ &= -x^5 + 2x^3 - 4x \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

したがって、g は奇関数である。積分区間 $[-3, 3]$ は原点について対称であるから、左右の寄与が打ち消し合う。

$$\int_{-3}^{3} (x^5 - 2x^3 + 4x)\, dx = 0$$

したがって、求める値は 0 である。

例題 3：反射した式と足す

次の定積分を、x と $4 - x$ を組にして求めよ。

$$I = \int_{0}^{4} \frac{x^2}{x^2 + (4 - x)^2}\, dx$$

例題 3 の解答・解説

分母は次のように変形できる。

$$x^2 + (4 - x)^2 = 2(x - 2)^2 + 8$$

この値は区間 $[0, 4]$ 全体で正であるため、被積分関数は区間全体で連続である。$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + (4-x)^2}$ と置くと、反射した関数は次の形になる。

$$f(4 - x) = \frac{(4 - x)^2}{(4 - x)^2 + x^2}$$

分母は同じであり、分子を足すと分母そのものになる。したがって、$f(x) + f(4 - x) = 1$ である。反射公式より、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{0}^{4} \{f(x) + f(4 - x)\}\, dx \\ &= \int_{0}^{4} 1\, dx \\ &= 4 \end{aligned}$$

したがって、求める値は $I = 2$ である。分数関数を直接積分するのではなく、反射した式と足したときの単純化を利用している。

演習問題

演習 1：偶関数の基本

次の定積分を、対称性を利用して求めよ。

$$\int_{-1}^{1} (2x^4 + 3)\,dx$$

演習 2：奇関数の基本

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-2}^{2} (x^7 - 3x^3 + x)\,dx$$

演習 3：偶部分と奇部分

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 2x^2 - x + 1)\,dx$$

演習 4：誤りを見抜く

次の 2 つの判断の誤りを説明し、正しい値を求めよ。

(1) 「$x^2 + x$ には奇関数の項 x があるから、$\int_{-1}^{1} (x^2 + x)\,dx = 0$ である」

(2) 「x^3 は奇関数だから、$\int_{-1}^{2} x^3\,dx = 0$ である」

演習 5：中央について対称な関数

次の定積分を、中央 $x = 3$ に関する対称性を利用して求めよ。

$$\int_{0}^{6} \{(x - 3)^4 + 2\}\,dx$$

演習 6：中央について反対称な関数

次の定積分を求めよ。

$$\int_{0}^{4} \{(x - 2)^5 + 3(x - 2)\}\,dx$$

©ミライコーチング

演習 7：関数を具体化せずに求める

関数 f は閉区間 $[2,6]$ で連続であり、区間全体で $f(x)+f(8-x)=10$ を満たす。次の定積分を求めよ。

$$\int_{2}^{6} f(x)\,dx$$

演習 8：偶部分と奇部分への一般分解

実数 $h>0$ とし、関数 f は閉区間 $[-h,h]$ で連続である。次の 2 つの関数を考える。

$$E(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\qquad O(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

(1) E が偶関数、O が奇関数であり、$f(x)=E(x)+O(x)$ となることを示せ。
(2) 次の式を示せ。

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx=2\int_{0}^{h} E(x)\,dx$$

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$f(x)=2x^4+3$ とすると、$f(-x)=2(-x)^4+3=2x^4+3=f(x)$ であるため、f は偶関数である。積分区間は原点について対称なので、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(2x^4+3)\,dx&=2\int_{0}^{1}(2x^4+3)\,dx\\&=2\left[\frac{2x^5}{5}+3x\right]_{0}^{1}\\&=2\left(\frac{2}{5}+3\right)\\&=\frac{34}{5}\end{aligned}$$

したがって、求める値は $\frac{34}{5}$ である。

演習 2 の解答・解説

$g(x)=x^7-3x^3+x$ は、すべて奇数次の項からなる。実際、$g(-x)=-g(x)$ であるため、g は奇関数である。
積分区間 $[-2,2]$ は原点について対称であるから、対称な 2 点の寄与が打ち消し合う。したがって、求める値は 0 である。

演習 3 の解答・解説

被積分関数を、奇部分と偶部分に分ける。

$$x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x^3 - x) + (2x^2 + 1)$$

$x^3 - x$ は奇関数であるため、対称区間での定積分は 0 になる。一方、$2x^2 + 1$ は偶関数である。したがって、偶部分だけを右半分で積分する。

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (x^3 + 2x^2 - x + 1)\,dx &= 2\int_{0}^{2} (2x^2 + 1)\,dx \\ &= 2\left[\frac{2x^3}{3} + x\right]_0^2 \\ &= 2\left(\frac{16}{3} + 2\right) \\ &= \frac{44}{3}\end{aligned}$$

したがって、求める値は $\frac{44}{3}$ である。奇数次の項だけを消し、偶数次の項と定数項を残すことが判断の要点である。

演習 4 の解答・解説

(1) 関数全体が奇関数でなければ、定積分全体を 0 にはできない。x は奇関数なのでその寄与は消えるが、x^2 は偶関数なので残る。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (x^2 + x)\,dx &= 2\int_{0}^{1} x^2\,dx \\ &= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(2) x^3 は奇関数であるが、区間 $[-1, 2]$ は原点について対称ではない。奇関数の公式は使わず、端点を評価する。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x^3\,dx &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

したがって、正しい値は (1) $\frac{2}{3}$、(2) $\frac{15}{4}$ である。

演習 5 の解答・解説

$f(x)=(x-3)^4+2$ と置く。区間 $[0,6]$ の中央は 3 であり、反射した関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(6-x) &= (6-x-3)^4+2 \\ &= (3-x)^4+2 \\ &= (x-3)^4+2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

したがって、中央について対称である。右半分の定積分を 2 倍し、$u=x-3$ と置いて計算する。

$$\begin{aligned} \int_0^6 \left\{(x-3)^4+2\right\}dx &= 2\int_3^6 \left\{(x-3)^4+2\right\}dx \\ &= 2\int_0^3 (u^4+2)\,du \\ &= 2\left[\frac{u^5}{5}+2u\right]_0^3 \\ &= 2\left(\frac{243}{5}+6\right) \\ &= \frac{546}{5} \end{aligned}$$

したがって、求める値は $\frac{546}{5}$ である。

演習 6 の解答・解説

$f(x)=(x-2)^5+3(x-2)$ と置く。区間 $[0,4]$ の中央は 2 であり、反射した関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(4-x) &= (2-x)^5+3(2-x) \\ &= -(x-2)^5-3(x-2) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

したがって、f は中央 $x=2$ について反対称である。対称な 2 点の関数値が打ち消し合うため、求める値は 0 である。

演習 7 の解答・解説

$I = \int_2^6 f(x)\,dx$ と置く。区間 $[2,6]$ では $a+b=8$ であるから、反射公式によって次の関係を得る。

$$\begin{aligned} 2I &= \int_2^6 \{f(x) + f(8-x)\}\,dx \\ &= \int_2^6 10\,dx \\ &= 10(6-2) \\ &= 40 \end{aligned}$$

したがって、求める値は $I = 20$ である。関数 f の具体的な式が分からなくても、反射した 2 つの値の和が分かれば定積分を決められる。

演習 8 の解答・解説

(1) E で x を $-x$ に置き換える。

$$\begin{aligned} E(-x) &= \frac{f(-x)+f(x)}{2} \\ &= E(x) \end{aligned}$$

よって、E は偶関数である。次に、O について同じ操作を行う。

$$\begin{aligned} O(-x) &= \frac{f(-x)-f(x)}{2} \\ &= -\frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ &= -O(x) \end{aligned}$$

よって、O は奇関数である。また、2 つの式を足すと次のようになる。

$$\begin{aligned} E(x)+O(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(2) $f = E + O$ と定積分の線形性を用いる。E は偶関数、O は奇関数であり、区間は原点について対称である。

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} f(x)\,dx &= \int_{-h}^{h} E(x)\,dx + \int_{-h}^{h} O(x)\,dx \\ &= 2\int_0^h E(x)\,dx + 0 \end{aligned}$$

したがって、$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = 2\int_0^h E(x)\,dx$ が成り立つ。対称区間の定積分では、一般の関数も偶部分と奇部分に分ければ、奇部分が消えて偶部分だけが残る。