

第 81 講 分数式

学習目標

- ・ 分数式では分母が 0 にならない条件が必要であることを説明できる。
- ・ 分子・分母を因数分解し、共通因数を約分して分数式を簡単にできる。
- ・ 分母をそろえて、分数式の加法・減法を計算できる。
- ・ 分数式の乗法・除法を計算し、除法では割る分数式が 0 にならない条件まで確認できる。
- ・ 約分後も、元の式で分母が 0 になる値を除外したまま答えられる。

解法の要点

分数式を計算するときは、式変形だけでなく、最初の式で許されない値を最後まで残すことが重要である。

- ・ 分母が 0 になる値は除外する。
- ・ 約分は、分子と分母の共通する因数に対して行う。
- ・ 加法・減法では、分母をそろえてから分子を計算する。
- ・ 乗法では、因数分解してから約分すると計算しやすい。
- ・ 除法では逆数を掛ける。このとき、割る分数式そのものが 0 になる値も除外する。

分数式と分母の条件

整式を分子・分母にもつ式を分数式という。例えば、

$$\frac{x+1}{x-2}$$

は分数式である。

数の分数と同じように、分母が 0 になることは許されない。この式では $x=2$ のとき分母が 0 になるため、 $x \neq 2$ という条件が必要である。

分数式では、計算を始める前に元の分母が 0 になる値を確認する習慣が重要である。

約分しても元の条件は消えない

次の分数式を考える。

$$\frac{x^2-4}{x-2}$$

元の分母から、 $x \neq 2$ である。

分子を因数分解すると、

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

であるから、 $x \neq 2$ のもとで

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$

と約分できる。

ただし、簡単にした $x+2$ だけを見ると $x=2$ も代入できそうに見えるが、元の分数式は $x=2$ では定義されない。したがって、約分後も $x \neq 2$ という条件を残す必要がある。

加法・減法では分母をそろえる

分数式の加法・減法では、数の分数と同じように通分する。

例えば、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

では、元の分母から $x \neq 0, -1$ である。
共通の分母を $x(x+1)$ とすると、

$$\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x(x+1)}$$

であり、

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x(x+1)}$$

である。
したがって、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

となる。
通分するときは分母だけを変えるのではなく、分子にも同じ式を掛ける必要がある。

乗法と除法

分数式の乗法では、分子どうし、分母どうしを掛ける。因数分解できる部分があれば、掛け算をすべて行う前に約分すると計算しやすい。

除法では、割る分数式の逆数を掛ける。

例えば、

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D}$$

は、

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

として計算する。

このとき、元の分母である B と D が 0 でないことに加えて、割る分数式 $\frac{C}{D}$ が 0 であってはならない。そのため、 C も 0 でないことが必要である。

除法では、「分母が 0 でない」という条件だけでなく、「割る式が 0 でない」という条件も確認する必要がある。

例題

例題 1

次の分数式を簡単にし、 x の条件も示せ。

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

例題 1 の解答・解説

元の分母から、 $x \neq 3$ である。

分子を因数分解すると、

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

である。

したがって、 $x \neq 3$ のもとで

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

となる。

答えは $x + 3$ であり、条件は $x \neq 3$ である。約分後もこの条件は消えない。

例題 2

次の式を計算し、 x の条件も示せ。

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x + 1}$$

例題 2 の解答・解説

元の分母から、 $x \neq 0, -1$ である。

分母を $x(x + 1)$ にそろえると、

$$\frac{2}{x} = \frac{2(x + 1)}{x(x + 1)}$$

であり、

$$\frac{1}{x + 1} = \frac{x}{x(x + 1)}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{1}{x + 1} &= \frac{2(x + 1) + x}{x(x + 1)} \\ &= \frac{3x + 2}{x(x + 1)} \end{aligned}$$

となる。

答えは $\frac{3x+2}{x(x+1)}$ であり、条件は $x \neq 0, -1$ である。

例題 3

次の式を計算し、 x の条件も示せ。

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \div \frac{x + 1}{x - 2}$$

例題 3 の解答・解説

元の分母 $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ から $x \neq 2, -2$ である。割る分数式が 0 にならない条件は $x \neq -1$ である。

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ と因数分解し、除法を逆数の乗法に直すと、

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x - 2}{x + 1}$$

共通因数を約分すると $\frac{x-1}{x+2}$ となる。答えは $\frac{x-1}{x+2}$ 、条件は $x \neq 2, -2, -1$ である。

演習問題**演習問題 1**

次の分数式を簡単にし、 x の条件も示せ。

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$$

演習問題 2

次の分数式を簡単にし、 x の条件も示せ。

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$$

演習問題 3

次の式を計算し、 x の条件も示せ。

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{x - 1}$$

演習問題 4

次の式を計算し、 x の条件も示せ。

$$\frac{x}{x - 1} - \frac{2}{x + 1}$$

演習問題 5

次の式を計算し、 x の条件も示せ。

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} \cdot \frac{x + 3}{x + 2}$$

演習問題 6

次の式を計算し、 x の条件も示せ。

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x - 3}{x + 2}$$

演習問題 7

次の式を計算し、 x の条件も示せ。

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \div \frac{x - 2}{x + 1}$$

演習問題の解答・解説**演習問題 1 の解答・解説**

元の分母から、 $x \neq -2$ である。
分子を因数分解すると、

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

である。

したがって、 $x \neq -2$ のもとで

$$\frac{(x + 2)(x + 3)}{x + 2} = x + 3$$

となる。

答えは $x + 3$ 、条件は $x \neq -2$ である。

演習問題 2 の解答・解説

元の分母を因数分解すると、

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

であるから、条件は $x \neq 4, -4$ である。

分子は

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

と因数分解できる。

したがって、

$$\frac{x(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{x}{x + 4}$$

となる。

答えは $\frac{x}{x+4}$ 、条件は $x \neq 4, -4$ である。約分で $x - 4$ が消えても、 $x = 4$ は除外したままである。

演習問題 3 の解答・解説

元の分母から、 $x \neq 0, 1$ である。
共通の分母を $x(x-1)$ とすると、

$$\frac{3}{x} = \frac{3(x-1)}{x(x-1)}$$

であり、

$$\frac{2}{x-1} = \frac{2x}{x(x-1)}$$

である。
したがって、

$$\begin{aligned}\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} &= \frac{3(x-1) + 2x}{x(x-1)} \\ &= \frac{5x-3}{x(x-1)}\end{aligned}$$

となる。

答えは $\frac{5x-3}{x(x-1)}$ 、条件は $x \neq 0, 1$ である。

演習問題 4 の解答・解説

元の分母から、 $x \neq 1, -1$ である。
共通の分母を $(x-1)(x+1)$ とすると、

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

であり、

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

である。
したがって、

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} &= \frac{x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

となる。

答えは $\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+1)}$ 、条件は $x \neq 1, -1$ である。

演習問題 5 の解答・解説

元の分母から、

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

であるため、 $x \neq -3, 2$ である。また、もう一つの分母から $x \neq -2$ である。

したがって、条件は $x \neq -3, 2, -2$ である。

分子を因数分解すると、

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

である。

よって、

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 3)(x - 2)} \cdot \frac{x + 3}{x + 2}$$

となり、共通因数を約分すると 1 である。

答えは 1、条件は $x \neq -3, 2, -2$ である。

演習問題 6 の解答・解説

元の分母は、

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

であるため、 $x \neq 3, -2$ である。もう一つの分母からも $x \neq -2$ である。

分子は

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

と因数分解できる。

したがって、

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 2)} \cdot \frac{x - 3}{x + 2}$$

となる。

共通因数を約分すると、

$$\frac{x - 2}{x + 2}$$

を得る。

答えは $\frac{x-2}{x+2}$ 、条件は $x \neq 3, -2$ である。

演習問題 7 の解答・解説

元の分母 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ と割る分数式の分母から、 $x \neq 1, -1$ である。さらに、割る分数式が 0 にならない条件は $x \neq 2$ である。

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ と因数分解し、除法を逆数の乗法に直すと、

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} \cdot \frac{x + 1}{x - 2}$$

共通因数を約分すると $\frac{x+2}{x-1}$ となる。答えは $\frac{x+2}{x-1}$ 、条件は $x \neq 1, -1, 2$ である。