

第 151 講 階差を利用する漸化式

学習目標

数列の隣り合う項の差に注目し、更新式から一般項を求められるようになる。初項から必要な差を順に足す考え方を理解し、得られた一般項を元の更新式で確認できるようになる。

更新式を差として読む

漸化式では、次の項をどのように作るのが更新式として示されている。階差を利用する場合は、右辺を見るだけでなく、両辺から a_n を引いて隣り合う項の差として読む。

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ の両辺から a_n を引くと、 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ となる。

これは「 a_n から a_{n+1} へ進むとき、 $f(n)$ だけ変化する」という意味である。

初項 a_1 から考えると、 $n = 1$ の場合は更新を行わないため、値はそのまま初項 a_1 である。

$n \geq 2$ の場合は、 $k = 1$ から $n - 1$ まで順に a_k から a_{k+1} へ更新するので、 $n - 1$ 回分の変化を足す。したがって、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

となる。

上端が $n - 1$ になる理由は、 a_n に到達する最後の更新が a_{n-1} から a_n への変化であり、そのときに使う番号が $n - 1$ だからである。

この式は、隣接する差を足すことで途中の項が相殺されることから成り立つ。

例えば、 $n = 2$ では、 $a_2 = a_1 + (a_2 - a_1)$ となり、差は 1 つだけである。

$n \geq 3$ では差の和を考えると、

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1$$

となる。

内部の a_2 から a_{n-1} までの各項は、差の和の中で $+$ と $-$ がそれぞれ 1 回ずつ現れて相殺される。そのため、差の和に残るのは $a_n - a_1$ である。その差の和に初項 a_1 を加えると、 a_n となる。

階差を利用する漸化式

数列 $\{a_n\}$ が、正整数 n に対して定まる実数の項を持つ実数列であり、各正整数 k に対して実数 $f(k)$ が定まるとする。

すべての正整数 n で、 $a_{n+1} - a_n = f(n)$

が成立するとき、隣り合う項の差を利用して一般項を求めることができる。

$n \geq 2$ では、初項から $n - 1$ 回分の差を足すことで、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

となる。

一方、 $n = 1$ の場合は更新を行わないため、和を使わず初項 a_1 を直接確認する。

階差を利用する漸化式では、初項と全ての正整数 n における更新式の両方が与えられることで、数列全体が定まる。

考え方の流れ

1. 更新式を隣接差 $a_{n+1} - a_n$ の形に変える。
2. 初項から目的の項までの差を足す。
3. 得られた一般項が初項を満たすか確認する。
4. 一般項の隣接差が元の更新式になるか確認する。

負の差や一定の差でも考え方は変わらない。差が負なら項は減少し、差が一定なら等差数列になる。

有限個の値だけでは規則は決まらない

数列の有限個の値だけを見ても、数列全体の規則を一意に決めることはできない。階差を利用する場合でも、更新規則だけでは項の値を決める基準が不足している。初項は項番号の位置を決めるものではなく、数列の値の基準となるものである。初項と、すべての正整数 n で成立する更新規則の両方が指定されて、初めて数列全体が一意に定まる。したがって、少数の項の値から差の規則を予想するのではなく、与えられた漸化式と初項をもとに考える必要がある。

差の積み重ねを考える

$a_1 = 2$ 、 $a_{n+1} = a_n + 3n$ のとき、最初の変化を見る。

$a_2 - a_1 = 3$ 、 $a_3 - a_2 = 6$ 、 $a_4 - a_3 = 9$ となる。

差を順に足すことで、 $a_4 = 2 + 3 + 6 + 9 = 20$ となる。階差を利用する漸化式では、この積み重ねを一般化する。

例題 1

$a_1 = 2$ 、 $a_{n+1} = a_n + 3n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

例題 1 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。更新式を差の形に変える。

$a_{n+1} - a_n = 3n$ である。

初項 a_1 から a_n までの差を足す。

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3k$$

和を計算する。

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 2 + \frac{3(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

したがって、

$$a_n = 2 + \frac{3n(n-1)}{2}$$

である。

確認する。

$n = 1$ を代入すると、

$$2 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 0}{2} = 2$$

となり、初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(2 + \frac{3(n+1)n}{2} \right) - \left(2 + \frac{3n(n-1)}{2} \right) \\ &= \frac{3n\{(n+1) - (n-1)\}}{2} \\ &= 3n \end{aligned}$$

となるため、元の更新式と一致する。

例題 1 の対応を確認すると、差による更新は次のようになる。

移る項	更新で用いる値	差	項の値
$1 \rightarrow 2$	$n = 1$	3	2, 5
$2 \rightarrow 3$	$n = 2$	6	5, 11
$3 \rightarrow 4$	$n = 3$	9	11, 20

初項から差を足した結果が、更新式から得られる値と一致している。

例題 2

$a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = a_n + 2^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

例題 2 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。
更新式から隣接差を読む。

$a_{n+1} - a_n = 2^n$ である。
初項から差を足す。

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

等比数列の和を用いる。

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2$$

したがって、 $a_n = 1 + 2^n - 2$ であり、 $a_n = 2^n - 1$ となる。
確認すると、 $n = 1$ のとき $2^1 - 1 = 1$ で初項と一致する。
また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1) \\ &= 2^{n+1} - 2^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

となり、更新式と一致する。

例題 3

$a_1 = 3$ 、 $a_{n+1} = a_n + n^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

例題 3 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。
更新式から隣接差を読む。

$a_{n+1} - a_n = n^2$ である。
初項から差を足す。

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

平方和の公式を用いる。

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

したがって、

$$a_n = 3 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

である。
確認する。
 $n = 1$ のとき、

$$3 + \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 3$$

となり初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n\{(n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1)\}}{6} \\ &= \frac{n(6n)}{6} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

となるため、元の更新式と一致する。

演習問題

練習問題 1

$a_1 = 5$ 、 $a_{n+1} = a_n + 4$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

練習問題 2

$a_1 = 7$ 、 $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

練習問題 3

$a_1 = 10$ 、 $a_{n+1} = a_n - 3n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

練習問題 4

$a_1 = 4$ 、 $a_{n+1} = a_n + n^2 + 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

練習問題 5

$a_1 = 2$ 、 $a_{n+1} = a_n + 3 \cdot 2^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

練習問題 6

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = a_n + 2n$ を満たすとき、初項 a_1 が与えられていない場合、一般項が一意に決まらない理由を説明せよ。

練習問題 7

$a_1 = 3$ 、 $a_{n+1} = a_n + n + 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を求める途中で

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^n (k + 1)$$

と考えた誤りを説明し、正しい一般項を求めよ。

練習問題 8

$a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = a_n + n^2 - n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

練習問題 1 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。
更新式を隣接差に直す。

$a_{n+1} - a_n = 4$ である。

a_1 から a_n までには $n - 1$ 回の更新があるので、

$$a_n = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} 4$$

となる。

差が一定なので、 $a_n = 5 + 4(n - 1)$

よって、 $a_n = 4n + 1$ である。

確認する。

$n = 1$ のとき、 $4 \cdot 1 + 1 = 5$ となり、初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \{4(n + 1) + 1\} - (4n + 1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

となり、元の更新式と一致する。

練習問題 2 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。
更新式から隣接差を読む。

$a_{n+1} - a_n = 2n - 1$ である。

したがって、

$$a_n = 7 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1)$$

である。

ここで、 $2k - 1$ は奇数列であり、 $n - 1$ 個の奇数の和になる。

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1) = (n - 1)^2$$

したがって、 $a_n = 7 + (n - 1)^2$ である。

確認する。

$n = 1$ のとき、 $7 + 0^2 = 7$ となり初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \{7 + n^2\} - \{7 + (n - 1)^2\} \\ &= n^2 - (n - 1)^2 \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

となり、元の更新式と一致する。

練習問題 3 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。
更新式を差の形にする。

$a_{n+1} - a_n = -3n$ である。

したがって、

$$a_n = 10 + \sum_{k=1}^{n-1} (-3k)$$

となる。

$$\begin{aligned} a_n &= 10 - 3 \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 10 - \frac{3(n - 1)n}{2} \end{aligned}$$

よって、

$$a_n = 10 - \frac{3(n - 1)n}{2}$$

である。

確認する。

$n = 1$ のとき、

$$10 - \frac{3 \cdot 0 \cdot 1}{2} = 10$$

となり初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(10 - \frac{3n(n+1)}{2}\right) - \left(10 - \frac{3(n-1)n}{2}\right) \\ &= -3n \end{aligned}$$

となり、元の更新式と一致する。

練習問題 4 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。

隣接差は、 $a_{n+1} - a_n = n^2 + 1$ である。

したがって、

$$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + 1)$$

である。

和を分ける。

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 4 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n - 1 \end{aligned}$$

よって、

$$a_n = 4 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n - 1$$

である。

確認する。

$n = 1$ のとき、

$$4 + \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} + 0 = 4$$

となり初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(4 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\right) \\ &\quad - \left(4 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n - 1\right) \\ &= n^2 + 1 \end{aligned}$$

となり、元の更新式と一致する。

練習問題 5 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。

隣接差は、 $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^n$ である。

したがって、

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$$

である。

等比数列の和より、

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k = 3(2^n - 2)$$

となる。

したがって、 $a_n = 2 + 3(2^n - 2)$

よって、 $a_n = 3 \cdot 2^n - 4$ である。

確認する。

$n = 1$ のとき、 $3 \cdot 2 - 4 = 2$ となり初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (3 \cdot 2^{n+1} - 4) - (3 \cdot 2^n - 4) \\ &= 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

となり、元の更新式と一致する。

練習問題 6 の解答・解説

更新式から隣接差を読むと、 $a_{n+1} - a_n = 2n$ である。

初項を一般の実定数 A とすると、 $n \geq 2$ では差を足して、

$$a_n = A + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

となる。

和を計算すると、

$$\begin{aligned} a_n &= A + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &= A + n(n-1) \end{aligned}$$

となる。

この式は全正整数 n で成立する。実際、 $n = 1$ のとき、 $a_1 = A + 1 \cdot 0 = A$ となり、初項と一致する。また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \{A + (n+1)n\} - \{A + n(n-1)\} \\ &= n(n+1) - n(n-1) \\ &= 2n \end{aligned}$$

となるため、全正整数 n で元の更新式と一致する。

しかし、初項 A が指定されていないため、一般項は 1 つに決まらない。

例えば、 $A = 1$ の場合は、 $a_n = 1 + n(n-1)$ となる。

一方、 $A = 5$ の場合は、 $a_n = 5 + n(n-1)$ となる。

どちらも隣接差は $2n$ であり、同じ更新規則を満たす。しかし、初項が異なるため数列の全項も異なる。

したがって、初項が指定されていない場合、更新規則だけでは数列は一意に定まらない。

練習問題 7 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。

更新式から、 $a_{n+1} - a_n = n + 1$ である。

a_1 から a_n へ移る回数は $n - 1$ 回なので、正しくは

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k + 1)$$

である。

誤った式では、 a_n へ到達した後の更新である n 回目の差まで足している。そのため、必要な差より 1 つ多く足している。

正しい式を計算する。

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k + 1) \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 3 + \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 \end{aligned}$$

よって、

$$a_n = 3 + \frac{(n-1)n}{2} + n - 1$$

である。

確認する。

$n = 1$ のとき、 $3 + 0 + 0 = 3$ となり初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(3 + \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &\quad - \left(3 + \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 \right) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

となり、元の更新式と一致する。

練習問題 8 の解答・解説

以下ではまず $n \geq 2$ として差の和を計算し、得られた式は $n = 1$ でも初項と一致するか別に確認する。

隣接差は、 $a_{n+1} - a_n = n^2 - n$ である。

したがって、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - k)$$

となる。

和を分ける。

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

よって、

$$a_n = 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}$$

である。

確認する。

$n = 1$ のとき、 $1 + 0 - 0 = 1$ となり初項と一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &\quad - \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \right) \\ &= n^2 - n \end{aligned}$$

となり、元の更新式と一致する。