

第 132 講 微分を方程式・不等式へ使う

学習目標

- ・ 方程式 $F(x) = 0$ の実数解の個数を、関数のグラフと x 軸の共有点として考えられるようになる。
- ・ 導関数による増減の調査を利用して、多項式方程式の異なる実数解の個数を判断できるようになる。
- ・ 不等式を差の関数へ変換し、最小値を調べて証明できるようになる。

方程式を関数の共有点として見る

方程式の解は、式を変形して求めるだけでなく、グラフ上の交点として考えることができる。

方程式 $F(x) = 0$ の解は、関数 $y = F(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である。

また、方程式 $F(x) = k$ の解は、関数 $y = F(x)$ のグラフと水平線 $y = k$ の共有点の x 座標である。

2 つの式の等式を調べる場合は、両辺の差を 1 つの関数にする。

例えば、 $A(x) = B(x)$ を考えるとき、 $F(x) = A(x) - B(x)$

とおけば、求める解は $F(x) = 0$ の解になる。

この見方を使うと、直接解けない方程式でも、増減や極値から解の個数を判断できる。

方程式の解の個数と増減

関数 $F(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は、方程式 $F(x) = 0$ の異なる実数解の個数に対応する。

このとき、グラフが x 軸を横切る場合だけでなく、 x 軸に接して折り返す場合も、共有点は 1 個として数える。

解の個数を判断するときは、解の存在と一意性を分けて考える。

多項式 $F(x)$ と有限な 2 点 $a < b$ について、 $F(a)F(b) < 0$

ならば、連続性より (a, b) の間に少なくとも 1 つの解が存在する。

一方、ある区間で $F(x)$ が厳密に増加または厳密に減少しているならば、その区間の解は高々 1 つである。

したがって、増減区間ごとに「少なくとも 1 つあるか」と「高々 1 つしかないか」を確認する必要がある。

また、 $F'(x) = 0$ で区切った境界の値そのものが $F(x) = 0$ の解になっている可能性もあるため、境界上の値も必ず確認する。

増減を使うときの判断

方程式 $F(x) = 0$ の解の個数を調べるとき、導関数 $F'(x)$ は元の方程式を解くためではなく、関数 $F(x)$ の増減を調べるために使う。

$F'(x) = 0$ の解は、増減が変化する可能性がある候補である。ただし、その点が元の方程式

$F(x) = 0$ の解かどうかは別に確認する必要がある。

実際に、重解では $F'(x) = 0$ かつ $F(x) = 0$ になる場合もあるため、「 $F'(x) = 0$ の解は元の方程式の解ではない」と一律に考えてはいけない。

解の個数を調べる手順は次の通りである。

1. 等式の両辺の差をとり、 $F(x) = 0$ の形にする。

2. $F'(x)$ を調べ、増減を区切る候補を求める。
3. 各区間で厳密増加・厳密減少かを確認する。
4. 各区間で符号の変化から解の存在を確認する。
5. 境界の値が $F(x) = 0$ になっていないか確認する。
6. 全ての増減区間を合わせて、解の個数を判断する。

よくある誤り

「増加しているから解が高々 1 個である」と考えるのは不十分である。

単調増加には、同じ値をとる区間を持たないとは限らない弱い意味での増加も含まれるため、解が高々 1 個であることを保証するには、厳密増加または厳密減少であることを確認する。

また、次の点に注意する。

- ・ $F'(x) = 0$ で得られた値を、そのまま $F(x) = 0$ の解だと思えない。 $F(x)$ へ代入して確認する。
- ・ 微分して得られた式は、一般に元の方程式と同値ではない。微分によって解の情報が変化する場合がある。
- ・ 接している共有点を、異なる実数解として重複して数えない。
- ・ グラフの見た目だけで全実数範囲の解の個数を断定しない。増減区間と境界の確認を行う。

例題 1

方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の異なる実数解の個数を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

左辺を関数として、 $F(x) = x^3 - 3x + 1$ とおく。

導関数は、 $F'(x) = 3x^2 - 3$ であり、 $F'(x) = 3(x-1)(x+1)$ となる。

したがって、増減を区切る候補は $x = -1, 1$ である。

値を調べると、 $F(-2) = -1$ 、 $F(-1) = 3$ 、 $F(1) = -1$ 、 $F(2) = 3$ である。

まず、 $F(-2)F(-1) < 0$ より、 $(-2, -1)$ に少なくとも 1 つ解が存在する。

また、 $F(-1)F(1) < 0$ より、 $(-1, 1)$ に少なくとも 1 つ解が存在する。

さらに、 $F(1)F(2) < 0$ より、 $(1, 2)$ に少なくとも 1 つ解が存在する。

次に一意性を確認する。

$F'(x)$ の符号より、

- ・ $(-\infty, -1)$ では厳密増加
- ・ $(-1, 1)$ では厳密減少
- ・ $(1, \infty)$ では厳密増加

である。

したがって、それぞれの増減区間には解が高々 1 つしか存在しない。

既に各区間の一部で 1 つずつ解が存在することを示しているため、

- ・ $(-\infty, -1)$ に 1 個
- ・ $(-1, 1)$ に 1 個
- ・ $(1, \infty)$ に 1 個

の解がある。

最後に境界を確認すると、 $F(-1) = 3$ 、 $F(1) = -1$ であり、どちらも 0 ではないため、境界自身は解ではない。

以上より、全実数範囲で異なる実数解は 3 個である。

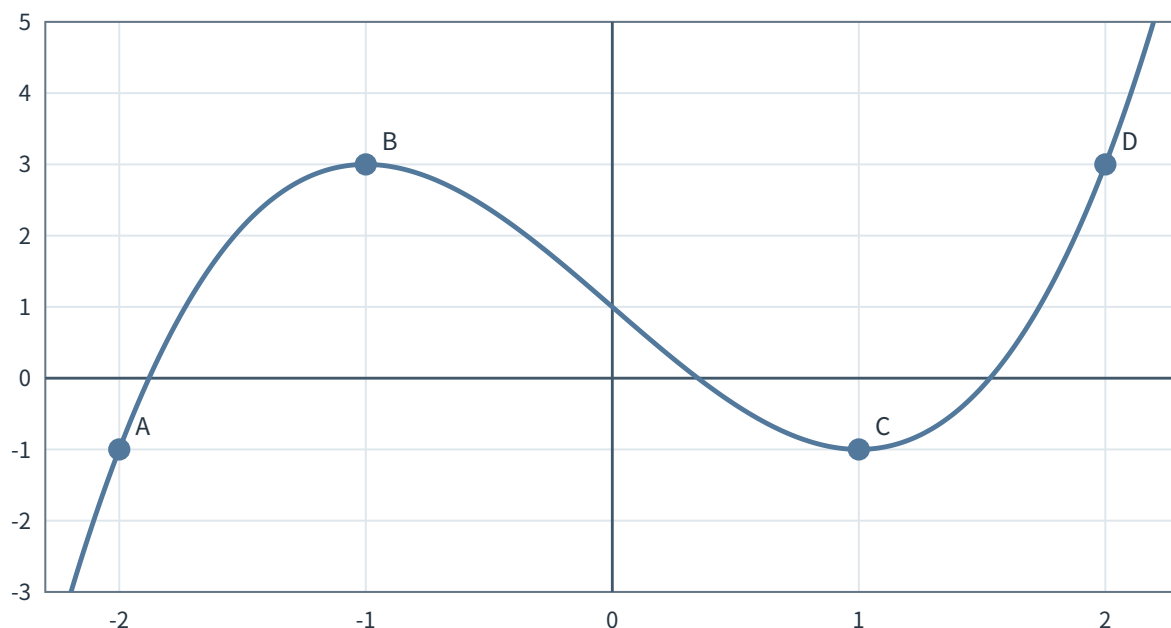


図1 $F(x) = x^3 - 3x + 1$ の定義域は実数全体（表示は一部）。 $A(-2, -1)$ 、 $B(-1, 3)$ 、 $C(1, -1)$ 、 $D(2, 3)$ は正確な値を表す。点は定義域の端点ではない。

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	↗	3	↘	-1	↗

図2 実数全体の増減表。連続性と符号の変化から、 $(-2, -1)$ 、 $(-1, 1)$ 、 $(1, 2)$ に少なくとも一つずつ実数解がある。表の三つの区間ではそれぞれ狭義単調なので各区間に高々一つであり、異なる実数解はちょうど三つと分かる。

例題 2

方程式 $x^3 + x - 1 = 0$

がただ 1 つの実数解をもち、その解が 0 と 1 の間にあることを示しなさい。

例題 2 の解答・解説

左辺を $G(x) = x^3 + x - 1$ とおく。

導関数は $G'(x) = 3x^2 + 1$ である。

任意の実数 x に対して、 $3x^2 + 1 > 0$ であるから、 $G(x)$ は全実数で厳密に増加する。

次に解の存在を確認する。

$G(0) = -1$ であり、 $G(1) = 1$ である。

両端で符号が異なるため、連続性より $(0, 1)$ の間に少なくとも 1 つ解が存在する。

さらに、 $G(x)$ は全実数で厳密に増加しているため、同じ値を 2 回とることはない。

したがって、方程式 $G(x) = 0$ の実数解は高々 1 つである。

存在と一意性を合わせると、この方程式はただ 1 つの実数解をもち、その解は 0 と 1 の間にある。

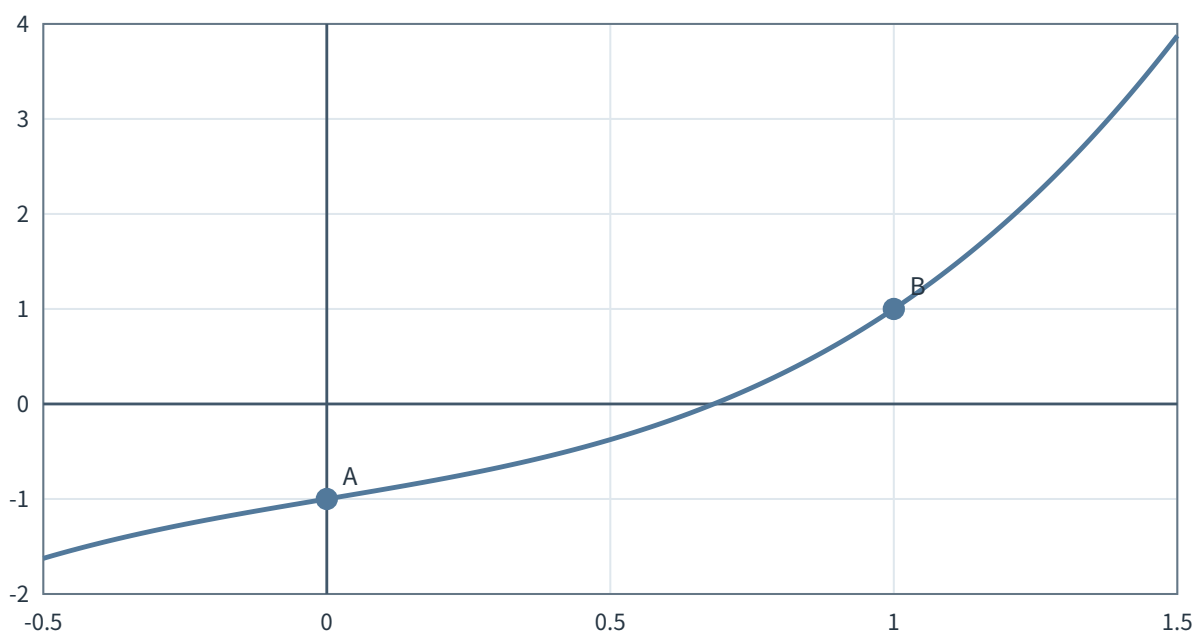


図 3 $G(x) = x^3 + x - 1$ の定義域は実数全体（表示は一部）。 $A(0, -1)$ 、 $B(1, 1)$ を通る。 $G'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ より全域で狭義単調増加し、連続性と $G(0) < 0 < G(1)$ より実数解は $(0, 1)$ にただ一つある。

例題 3

$x \geq 0$ のとき、 $x^3 + 2 \geq 3x$ を証明し、等号が成立する条件を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

両辺の差を考える。

$H(x) = x^3 - 3x + 2$ とおく。

不等式を示すには、 $H(x)$ の最小値が 0 以上であることを示せばよい。

導関数は $H'(x) = 3x^2 - 3$ であり、 $H'(x) = 3(x-1)(x+1)$ となる。

ここで定義域は $x \geq 0$ である。

$0 \leq x < 1$ では $H'(x) < 0$ であるため、 $H(x)$ は減少する。

$x > 1$ では $H'(x) > 0$ であるため、 $H(x)$ は増加する。

したがって、 $x = 1$ で最小値をとる。

なお、定義域は無限区間であるため、閉区間上の最大最小定理をそのまま使うことはできない。ここでは増減から最小値を確定している。

最小値は $H(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ である。

よって、すべての $x \geq 0$ に対して

$H(x) \geq 0$ が成り立つ。

つまり、 $x^3 + 2 \geq 3x$ である。

また、等号成立は最小値をとるときなので、 $x = 1$ である。

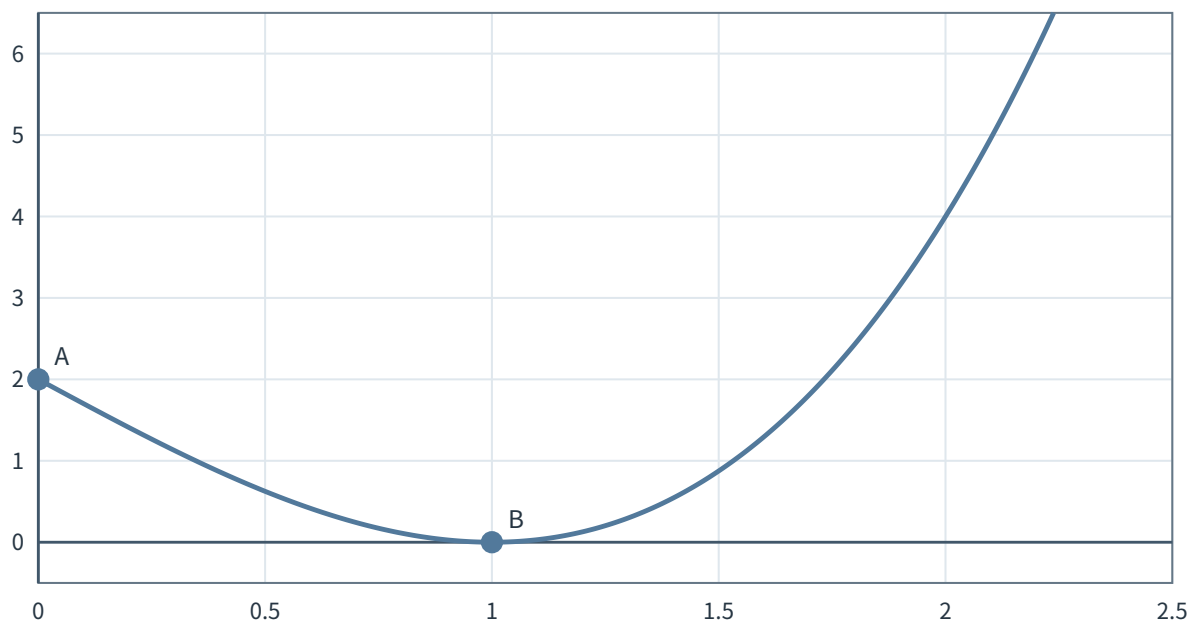


図4 $H(x) = x^3 - 3x + 2$ を定義域 $x \geq 0$ の部分だけ描いた曲線。A(0, 2) は含まれる端点、B(1, 0) は最小値 0 をとる点。曲線は右上へ続き、右上の切れ目は表示範囲の境界である。

x	0 (含む端点)	(0, 1)	1	(1, +∞)
$H'(x)$	端点	—	0	+
$H(x)$	2	↘	0	↗

定義域 $x \geq 0$ の増減表。右の区間は $1 < x$ 全体に続く。 $x = 1$ で最小値 0 をとるので、定義域全体で $H(x) \geq 0$ である。

練習問題 1

方程式 $x^3 - 3x - 2 = 0$ の異なる実数解の個数を求めなさい。

練習問題 2

方程式 $x^3 - 6x + 2 = 0$ について、異なる実数解が 3 個存在することを示し、それぞれの解が入る区間を求めなさい。

練習問題 3

方程式 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ について、異なる実数解の個数を求めなさい。
また、三重根を異なる実数解として何個と数えるか、その理由を説明しなさい。

練習問題 4

方程式 $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ について、異なる実数解の個数を求めなさい。

練習問題 5

関数 $F(x) = x^3 - 3x + 4$ について、方程式 $F(x) = 0$ の実数解がただ 1 つであることを示し、その解が入る区間を求めなさい。

練習問題 6

すべての実数 x に対して、 $x^4 + 3 \geq 4x$ が成り立つことを証明し、等号成立条件を求めなさい。

練習問題 7

$x \geq 1$ のとき、 $x^3 - 4x + 3 \geq 0$ が成り立つか調べなさい。
成り立つ場合は証明し、成り立たない場合は反例を示しなさい。

練習問題 8

次の考え方が正しいか判定し、誤りなら理由を説明しなさい。
「方程式 $f(x) = 0$ の解を調べるために $f'(x) = 0$ を解いた。この解が 2 つあるので、元の方程式にも 2 つの実数解がある。」

練習問題 1 の解答・解説

関数 $F(x) = x^3 - 3x - 2$ とおく。
導関数は $F'(x) = 3x^2 - 3$ であり、 $F'(x) = 3(x-1)(x+1)$ となる。
したがって、増減が変化する候補は $x = -1, 1$ である。
値を調べると、 $F(-2) = -4$ 、 $F(-1) = 0$ 、 $F(1) = -4$ 、 $F(2) = 0$ である。
ここで、 $F(-1) = 0$ 、 $F(2) = 0$ より、 $x = -1$ と $x = 2$ は解である。
さらに、 $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$
と因数分解できる。
 $x = -1$ は 2 重根であり、異なる実数解としては 1 つだけ数える。
したがって、異なる実数解は $x = -1, 2$ の 2 個である。

練習問題 2 の解答・解説

関数 $F(x) = x^3 - 6x + 2$ とおく。
導関数は、 $F'(x) = 3x^2 - 6$ であり、 $F'(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ となる。
したがって、増減を区切る候補は $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ である。
値を調べると、 $F(-3) = -7$
 $F(-\sqrt{2}) = 2 + 4\sqrt{2} > 0$ である。
よって、 $(-3, -\sqrt{2})$ に少なくとも 1 つ解が存在する。
また、 $F(0) = 2 > 0$
 $F(\sqrt{2}) = 2 - 4\sqrt{2} < 0$ である。
よって、 $(0, \sqrt{2})$ に少なくとも 1 つ解が存在する。
さらに、 $F(2) = -2$
 $F(3) = 11$ である。
よって、 $(2, 3)$ に少なくとも 1 つ解が存在する。

次に、増減区間全体を確認する。

$F'(x)$ の符号より、

- $(-\infty, -\sqrt{2})$ では厳密増加
- $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ では厳密減少
- $(\sqrt{2}, \infty)$ では厳密増加

である。

したがって、各増減区間には解が高々 1 つしか存在しない。

さらに境界を確認すると、 $F(-\sqrt{2}) = 2 + 4\sqrt{2} \neq 0$

$F(\sqrt{2}) = 2 - 4\sqrt{2} \neq 0$ であり、境界自身は解ではない。

以上より、3 つの増減区間にそれぞれ 1 個ずつ解が存在し、それ以外に解はない。

したがって、異なる実数解は 3 個であり、存在区間は $(-3, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$, $(2, 3)$ である。

練習問題 3 の解答・解説

関数 $F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ とおく。

因数分解すると、 $F(x) = (x - 1)^3$ である。

したがって、方程式 $F(x) = 0$ の解は $x = 1$ だけである。

また、 $F'(x) = 3(x - 1)^2$ である。

$x < 1$ では $F'(x) > 0$ 、 $x > 1$ でも $F'(x) > 0$ であり、 $x = 1$ では導関数が 0 になる。

このため、 $x = 1$ では接線が水平になるが、関数の値は $F(x) = (x - 1)^3$ の形から、左側で負、右側で正となる。

つまり、このグラフは x 軸に接して折り返すのではなく、水平な接線を持ちながら x 軸を横切る。

三重根でも解の値は $x = 1$ の 1 種類なので、異なる実数解としては 1 個と数える。

したがって、異なる実数解は 1 個である。

練習問題 4 の解答・解説

関数 $F(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ とおく。

因数分解すると、 $F(x) = x^2(x + 1) - 1(x + 1)$ より、 $F(x) = (x + 1)(x^2 - 1)$ となる。

さらに、 $F(x) = (x + 1)^2(x - 1)$ である。

したがって、 $x = -1$, $x = 1$

が解である。

$x = -1$ は 2 重根であるため、異なる実数解としては 1 つだけ数える。

よって、異なる実数解は 2 個である。

練習問題 5 の解答・解説

関数 $F(x) = x^3 - 3x + 4$ とおく。

導関数は、 $F'(x) = 3x^2 - 3$ であり、 $F'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$ となる。

したがって、増減を区切る候補は $x = -1, 1$ である。

値を調べると、 $F(-3) = -27 + 9 + 4 = -14$

$F(-2) = -8 + 6 + 4 = 2$ である。

よって、 $(-3, -2)$ に少なくとも 1 つ解が存在する。

また、 $F(-1) = 6$

$F(1) = 2$ である。

$F'(x)$ の符号から、

- $x < -1$ では厳密増加
- $-1 < x < 1$ では厳密減少
- $x > 1$ では厳密増加

である。

中央の区間では、閉区間 $[-1, 1]$ で考えると $F(x)$ は厳密に減少しているため、最小値は端点 $x = 1$ にとる。

$F(1) = 2 > 0$ である。

したがって、閉区間 $[-1, 1]$ の内部である $-1 < x < 1$ においても $F(x)$ は常に正であり、この区間には解が存在しない。

また、 $x > 1$ でも増加し、 $F(1) = 2 > 0$ なので正のままである。

したがって、 $x \geq -1$ では $F(x) > 0$ であり、解は存在しない。

一方、 $x < -1$ では厳密増加であり、 $(-3, -2)$ に少なくとも 1 つ解が存在するため、この区間の解は 1 個だけである。

以上より、方程式 $F(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもち、その解は $-3 < x < -2$ にある。

練習問題 6 の解答・解説

差の関数を考える。

$H(x) = x^4 - 4x + 3$ とおく。

不等式を示すには、 $H(x)$ の最小値が 0 以上であることを示せばよい。

導関数は、 $H'(x) = 4x^3 - 4$ であり、 $H'(x) = 4(x^3 - 1) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$ となる。

ここで、

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

である。

したがって、 $H'(x)$ の符号は $x - 1$ の符号で決まる。

よって、

- $x < 1$ では $H'(x) < 0$
- $x > 1$ では $H'(x) > 0$ である。

したがって、 $x = 1$ で全実数範囲の最小値をとる。

値を調べると、 $H(1) = 1 - 4 + 3 = 0$ である。

よって、すべての実数 x に対して

$H(x) \geq 0$ が成り立つ。

したがって、 $x^4 + 3 \geq 4x$ である。

等号成立条件は、最小値をとる

$x = 1$ のみである。

練習問題 7 の解答・解説

差の関数を

$H(x) = x^3 - 4x + 3$ とおく。

導関数は、 $H'(x) = 3x^2 - 4$ である。

$x \geq 1$ の範囲で、 $H'(x) < 0$ となるのは、

$$1 \leq x < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

である。

実際に、 $H'(1) = -1 < 0$ である。

したがって、区間

$$\left[1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

では $H(x)$ は厳密に減少する。

また、 $H(1) = 1 - 4 + 3 = 0$ であるから、 $x = 1$ の直後では必ず $H(x) < 0$ となる。
実際に、

$$x = \frac{6}{5}$$

は $x \geq 1$ を満たし、

$$\begin{aligned} H\left(\frac{6}{5}\right) &= \left(\frac{6}{5}\right)^3 - 4\left(\frac{6}{5}\right) + 3 \\ &= \frac{216}{125} - \frac{24}{5} + 3 \\ &= \frac{216}{125} - \frac{600}{125} + \frac{375}{125} \\ &= -\frac{9}{125} < 0 \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$x = \frac{6}{5}$$

は条件 $x \geq 1$ を満たす反例である。

よって、不等式 $x^3 - 4x + 3 \geq 0$ は $x \geq 1$ のすべてで成り立つわけではない。

練習問題 8 の解答・解説

この考え方は正しくない。

$f'(x) = 0$ の解は、関数の増減を調べるための候補であり、元の方程式 $f(x) = 0$ の解の個数と必ず一致するとは限らない。

例えば、 $f(x) = x^3 - 3x$ を考える。

導関数は、 $f'(x) = 3x^2 - 3$ であるから、 $f'(x) = 0$

の解は $x = -1, 1$ の 2 つである。

しかし、元の方程式は、 $x^3 - 3x = 0$ より、 $x(x^2 - 3) = 0$ となる。

したがって、 $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ の 3 つが解である。

このように、 $f'(x) = 0$ の解は増減を区切る候補であり、元の方程式の解とは別に確認する必要がある。

したがって、「 $f'(x) = 0$ の解が 2 つあるから、元の方程式にも 2 つの実数解がある」という判断は誤りである。