第 228 講 位置ベクトル

学習目標

- 原点を基準にして、点の位置を位置ベクトルで表せる。
- 点の座標と位置ベクトルの成分を相互に読み替えられる。
- 2 点の位置ベクトルから、2 点を結ぶベクトルを求められる。
- $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ となる理由を説明できる。

1. 点の位置をベクトルで表す

位置には基準が必要である

「右へ 3 進んだ」という情報だけでは、到着した場所は決まらない。どこから進んだかが必要である。同じように、点の位置をベクトルで表すときも基準となる点を決める。
平面上で原点 O を基準とする。点 A の位置は、O から A へ向かうベクトル $\overrightarrow{OA}$ で表せる。

位置ベクトル

原点を O とする。点 A に対して、$\overrightarrow{OA}$ を点 A の位置ベクトルという。
点 A の位置ベクトルを文字 $\vec{a}$ で表すときは、$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ と書く。同様に、点 B の位置ベクトルを $\vec{b}$ とすると、$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ である。

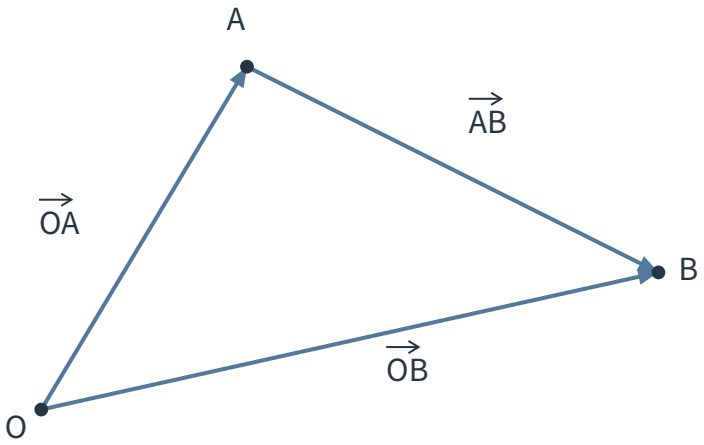

図 1　原点から点へ向かう位置ベクトルと A から B へのベクトル

2. 座標と位置ベクトル

座標と成分は同じ数の組になる

点 A の座標が (x, y) なら、原点 $O(0,0)$ から点 $A(x, y)$ への変化は、x 方向に x、y 方向に y である。この対応は次のように表せる。

$$A(x, y), \qquad \overrightarrow{OA} = (x, y)$$

この対応では、点と位置ベクトルは異なるものであるが、座標と成分には同じ数が並ぶ。

点とベクトルを区別する

$A(2, -1)$ は点を表し、$\vec{a} = (2, -1)$ は大きさと向きをもつベクトルを表す。数の組が同じでも、記号の意味は異なる。

3. 2 点を結ぶベクトル

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ の理由

点 A、B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$、$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする。
O から A を通って B へ進む経路を考える。ベクトルの加法を使うと、次の式を得る。

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

この式へ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$、$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ を代入すると、$\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ となる。$\overrightarrow{AB}$ について解くと、次の式を得る。

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

この式は「終点 B の位置ベクトルから始点 A の位置ベクトルを引く」ことを表す。

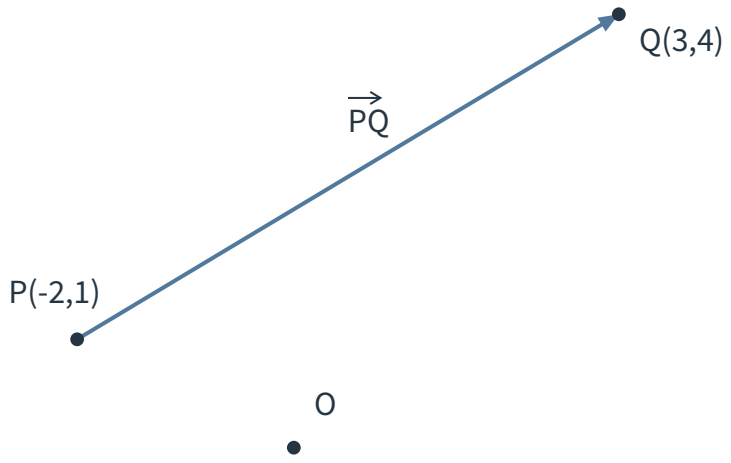

図 2　P(-2,1)から Q(3,4)への成分の変化

終点から始点を引く

点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ に対する成分計算は、次の式で表せる。

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

向きを逆にすると、$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = -\overrightarrow{AB}$ となる。

ベクトルの長さ

2 点間の距離は、2 点を結ぶベクトルの長さである。点 $P(-2, 1)$、$Q(3, 4)$ では、$\overrightarrow{PQ} = (5, 3)$ である。その長さは次のように求められる。

$$PQ = |\ \overrightarrow{PQ}\ | = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

この計算から $PQ = \sqrt{34}$ である。一般に、$AB = |\ \vec{b} - \vec{a}\ |$ である。

4. 例題

例題 1：点から位置ベクトルを求める

原点を O とする。点 $A(-3, 2)$ の位置ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

点の座標と位置ベクトルの成分には同じ数が並ぶので、$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (-3, 2)$ である。

例題 2：位置ベクトルから点を求める

点 B の位置ベクトルが $\vec{b} = (4, -5)$ である。点 B の座標を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (4, -5)$ であるから、点 B の座標は $(4, -5)$ である。

例題 3：2 点を結ぶベクトルを求める

点 $A(2, -1)$、$B(-3, 4)$ に対して、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BA}$ を求めよ。

例題 3 の解答・解説

終点から始点を引くと、$\overrightarrow{AB} = (-3 - 2,\ 4 - (-1)) = (-5, 5)$ である。向きを逆にすると符号が反対になるので、$\overrightarrow{BA} = (5, -5)$ である。

例題 4：ベクトルと長さを求める

点 $C(-1, -2)$、$D(3, 1)$ に対して、$\overrightarrow{CD}$ と線分 CD の長さを求めよ。

例題 4 の解答・解説

$\overrightarrow{CD} = (3 - (-1),\ 1 - (-2)) = (4, 3)$ である。したがって、$CD = |\ \overrightarrow{CD}\ | = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ である。

©ミライコーチング

5. 演習問題

演習 1：位置ベクトルを求める

点 $P(5, -2)$ の位置ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ を求めよ。

演習 2：点の座標を求める

点 Q の位置ベクトルが $\vec{q} = (-4, 3)$ である。点 Q の座標を求めよ。

演習 3：2 点を結ぶベクトルを求める

点 $A(-2, 4)$、$B(3, -1)$ に対して、$\overrightarrow{AB}$ を求めよ。

演習 4：向きを逆にする

点 $C(1, 5)$、$D(-2, 2)$ に対して、$\overrightarrow{CD}$ と $\overrightarrow{DC}$ を求めよ。

演習 5：終点を求める

点 $A(2, 1)$ から点 B へ向かうベクトルが $\overrightarrow{AB} = (-5, 4)$ である。点 B の座標を求めよ。

演習 6：始点を求める

点 $D(4, -3)$ を終点とするベクトルが $\overrightarrow{CD} = (6, -1)$ である。点 C の座標を求めよ。

演習 7：ベクトルの長さを求める

点 $R(-3, -1)$、$S(1, 2)$ に対して、$\overrightarrow{RS}$ と線分 RS の長さを求めよ。

演習 8：式の理由を説明する

点 A、B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$、$\vec{b}$ とする。$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ となる理由を、O から A を通って B へ進む経路を用いて説明せよ。

6. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

点の座標と位置ベクトルの成分には同じ数が並ぶので、$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (5, -2)$ である。

演習 2 の解答・解説

$\vec{q} = \overrightarrow{OQ} = (-4, 3)$ であるから、点 Q の座標は $(-4, 3)$ である。

©ミライコーチング

演習 3 の解答・解説

終点 B から始点 A を引いて、$\overrightarrow{AB} = (3-(-2),\ -1-4) = (5,-5)$ である。

演習 4 の解答・解説

$\overrightarrow{CD} = (-2-1,\ 2-5) = (-3,-3)$ である。また、$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD} = (3,3)$ である。

演習 5 の解答・解説

点 B の位置ベクトルを $\vec{b}$ とすると、$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ より、$\vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}$ である。したがって、$\vec{b} = (2,1) + (-5,4) = (-3,5)$ なので、点 B の座標は $(-3,5)$ である。

演習 6 の解答・解説

点 C の位置ベクトルを $\vec{c}$、点 D の位置ベクトルを $\vec{d}$ とすると、$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$ である。したがって、$\vec{c} = \vec{d} - \overrightarrow{CD} = (4,-3) - (6,-1) = (-2,-2)$ なので、点 C の座標は $(-2,-2)$ である。

演習 7 の解答・解説

$\overrightarrow{RS} = (1-(-3),\ 2-(-1)) = (4,3)$ である。したがって、$RS = |\overrightarrow{RS}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ である。

演習 8 の解答・解説

O から A へ進み、続いて A から B へ進むと、O から B へ進んだことになる。この経路をベクトルの加法で表すと、次の式になる。

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

ここへ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$、$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ を代入すると、$\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ である。両辺から $\vec{a}$ を引いて、$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ となる。

©ミライコーチング