

第 62 講 確率の基本法則

学習目標

- ・ 確率が必ず 0 以上 1 以下になることを説明できる。
- ・ 全事象の確率が 1、空事象の確率が 0 になる理由を説明できる。
- ・ 根元事象が同様に確からしい場合に、場合の数から確率を求められる。
- ・ 求めた値が確率として妥当か確認できる。

確率には必ず守る範囲がある

確率は 0 から 1 までの数

前講では、根元事象が同様に確からしいとき、事象 A の確率を、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

と求めました。

ここで、 $n(\Omega)$ は起こりうるすべての場合の数、 $n(A)$ はそのうち事象 A に当てはまる場合の数です。事象 A に当てはまる場合の数は、全体の場合の数より多くなることはありません。

また、場合の数が負になることはありません。

したがって、

$$0 \leq n(A) \leq n(\Omega)$$

です。

よって、確率には、

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

という範囲があります。

確率の値の範囲

どの事象 A についても、

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

です。

計算後は範囲を確認する

確率を求めたら、答えが 0 以上 1 以下か確認します。

たとえば、

- ・ $-\frac{1}{3}$
- ・ $\frac{7}{5}$

のような値が出たなら、確率として不適切なので、数え方や計算を見直します。

全事象の確率は 1

全事象

ある試行で起こりうるすべての根元事象を集めた事象を**全事象**といいます。

必ずどれかが起こる

公正な 6 面さいころを 1 回投げるとき、起こりうる目は、
1, 2, 3, 4, 5, 6

です。

「1 から 6 までのいずれかの目が出る」という事象は、起こりうるすべての場合を含んでいます。
この事象の場合の数は、全体の場合の数と同じ 6 です。
したがって、

$$\frac{6}{6} = 1$$

です。

つまり、必ず起こる事象の確率は 1 です。

全事象の確率

全事象を Ω とすると、

$$P(\Omega) = 1$$

です。

確率 1 は必ず起こる

全事象は、起こりうるすべての結果を含んでいます。
そのため、全事象の確率は必ず 1 になります。

空事象の確率は 0

空事象

起こりうる根元事象を 1 つも含まない事象を**空事象**といいます。

起こる場合が 1 つもない

公正な 6 面さいころを 1 回投げるとき、
「7 の目が出る」
という条件を考えます。
6 面さいころでは 7 の目は出ないので、この条件を満たす根元事象は 0 個です。
したがって、その確率は、

$$\frac{0}{6} = 0$$

です。

このように、絶対に起こらない事象の確率は 0 です。

空事象の確率

空事象の確率は、

$$0$$

です。

確率 0 と 1

- ・絶対に起こらない事象の確率は 0
- ・必ず起こる事象の確率は 1
- ・それ以外の事象の確率は 0 と 1 の間と考えます。

同様に確からしい場合の基本計算

分母と分子を同じ基準で数える

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 と書かれた 8 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

8 枚のカードが同様に選ばれやすいとき、「4 以下の数が書かれたカードを選ぶ」という事象を考えます。

全体は 8 通りです。

条件を満たすカードは、

$$1, 2, 3, 4$$

の 4 枚です。

したがって、

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

です。

この値は 0 以上 1 以下なので、確率として妥当です。

基本計算の手順

根元事象が同様に確からしいときは、次の順に確認します。

1. 全体の場合の数を数える。
2. 求める事象に当てはまる場合の数を数える。
3. 「条件を満たす場合の数 ÷ 全体の場合の数」で確率を求める。
4. 答えが 0 以上 1 以下か確認する。

分子が分母より大きくなったら見直す

確率を場合の数の比で求めるとき、事象に属する場合は全体の一部です。

したがって、分子が分母より大きくなることはありません。

もし、

$$\frac{8}{6}$$

のような値が出たなら、条件を満たす場合を重複して数えていないか確認します。

公正なコインで確認する

表か裏のどちらかは必ず起こる

公正なコインを1回投げるとき、起こりうる結果は、

- ・ 表
- ・ 裏

の2通りです。

「表が出る」という事象の確率は、

$$\frac{1}{2}$$

です。

「表または裏のどちらかが出る」という全事象の確率は、

$$\frac{2}{2} = 1$$

です。

一方、「表でも裏でもない結果が出る」という事象には、当てはまる結果がありません。

したがって、その確率は、

$$\frac{0}{2} = 0$$

です。

公正なさいころで確認する

事象の広さと確率

公正な6面さいころを1回投げます。

いくつかの事象を比べます。

事象	当てはまる目	確率
6の目が出る	6	$\frac{1}{6}$
偶数の目が出る	2, 4, 6	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
1から6の目が出る	1, 2, 3, 4, 5, 6	1
8の目が出る	なし	0

当てはまる根元事象が増えるほど、この例では確率も大きくなります。

ただし、どの場合でも確率は0以上1以下です。

確率として正しい値か判断する

計算しなくても除外できる値がある

確率について、

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

と分かったなら、 $\frac{3}{5}$ は 0 以上 1 以下なので、少なくとも値の範囲としては問題ありません。
一方、

$$P(A) = -\frac{1}{4}$$

や、

$$P(A) = \frac{6}{5}$$

は、確率の範囲から外れています。

そのため、詳しい計算を確認する前でも「どこかに誤りがある」と判断できます。

妥当性確認は答え合わせの道具

確率の計算では、最後に必ず、

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

を確認します。

これは単なる暗記ではなく、計算ミスや数え間違いを発見するための確認方法です。

例題

例題 1

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

「2 より大きい目が出る」という事象 A の確率を求め、その値が確率の範囲に入っていることを確認しなさい。

例題 1 の解答・解説

全体は、

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

の 6 通りです。

2 より大きい目は、

$$3, 4, 5, 6$$

の 4 通りです。

したがって、

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

です。

また、

$$0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$$

なので、確率として妥当な値です。

例題 2

1, 2, 3, 4, 5 と書かれた 5 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

次の事象の確率を求めなさい。

(1) 1 から 5 までのいずれかの数が書かれたカードを選ぶ。

(2) 6 が書かれたカードを選ぶ。

例題 2 の解答・解説

(1) 1 から 5 までのいずれかのカードを選ぶ事象は、起こりうるすべての場合を含む全事象です。したがって、

$$\frac{5}{5} = 1$$

です。

(2) 6 が書かれたカードはありません。

したがって、この事象は空事象で、確率は、

$$\frac{0}{5} = 0$$

です。

例題 3

公正なコインを 1 回投げるとき、ある生徒が「表が出る確率は $\frac{3}{2}$ である」と計算しました。この答えが誤りだと、計算過程を見なくても判断できる理由を説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

どの事象についても、確率は、

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

です。

しかし、

$$\frac{3}{2} > 1$$

です。

したがって、 $\frac{3}{2}$ は確率として取りうる値ではないため、計算に誤りがあると判断できます。

演習問題**練習問題 1**

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

「奇数の目が出る」という事象の確率を求め、その値が 0 以上 1 以下であることを確認しなさい。

練習問題 2

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 と書かれた 8 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。
「6 以上の数が書かれたカードを選ぶ」という事象の確率を求めなさい。

練習問題 3

公正なコインを 1 回投げます。
「表または裏のどちらかが出る」という事象の確率を、場合の数を使って求めなさい。

練習問題 4

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。
「10 の目が出る」という事象の確率を求めなさい。また、この事象がどのような事象か答えなさい。

練習問題 5

1, 2, 3, 4, 5, 6 と書かれた 6 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。
「3 の倍数が書かれたカードを選ぶ」という事象の確率を求め、その値が妥当であることを確認しなさい。

練習問題 6

次の数のうち、確率として取りうるものをすべて選びなさい。

- $\frac{1}{4}$
- 0
- 1
- $-\frac{1}{5}$
- $\frac{7}{6}$

練習問題 7

ある試行では、同様に確からしい根元事象が全部で 12 個あります。
事象 A に属する根元事象が 9 個あるとき、 $P(A)$ を求めなさい。
また、答えが確率として妥当か確認しなさい。

練習問題 8

ある生徒は、1, 2, 3, 4, 5 と書かれた 5 枚のカードから 1 枚を無作為に選ぶとき、「偶数を選ぶ確率」を、

$$\frac{4}{5}$$

としました。
誤りを説明し、正しい確率を求めなさい。

練習問題 9

公正な 6 面さいころを 1 回投げるとき、次の 3 つの事象について確率を求めなさい。

(1) 1 から 6 までのいずれかの目が出る。

(2) 4 の目が出る。

(3) 0 の目が出る。

また、それぞれの確率が 0 以上 1 以下であることを確認しなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

奇数の目は、

$$1, 3, 5$$

の 3 通りです。

全体は 6 通りなので、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

また、 $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ なので、確率として妥当です。

練習問題 2 の解答・解説

6 以上の数は、

$$6, 7, 8$$

の 3 通りです。

全体は 8 通りなので、求める確率は、

$$\frac{3}{8}$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

公正なコインを 1 回投げるとき、起こりうる結果は表と裏の 2 通りです。
「表または裏のどちらかが出る」という事象には、この 2 通りすべてが含まれます。
したがって、

$$\frac{2}{2} = 1$$

です。
これは全事象の確率です。

練習問題 4 の解答・解説

6 面さいころで 10 の目が出ることはありません。
条件を満たす場合は 0 通りなので、

$$\frac{0}{6} = 0$$

です。
この事象は空事象です。

練習問題 5 の解答・解説

1 から 6 までのうち、3 の倍数は、

$$3, 6$$

の 2 通りです。
全体は 6 通りなので、

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

です。
また、 $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1$ なので、確率として妥当です。

練習問題 6 の解答・解説

確率として取りうる値は、0 以上 1 以下の数です。
したがって、

- $\frac{1}{4}$
- 0
- 1

は確率として取りうる値です。
一方、 $-\frac{1}{5}$ は 0 より小さく、 $\frac{7}{6}$ は 1 より大きいので、確率として取りうる値ではありません。

練習問題 7 の解答・解説

全体が 12 通り、事象 A に属するものが 9 通りなので、

$$P(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

です。
また、 $0 \leq \frac{3}{4} \leq 1$ なので、確率として妥当です。

練習問題 8 の解答・解説

1 から 5 までのうち、偶数は、

2, 4

の 2 通りです。

4 通りではありません。

したがって、正しい確率は、

$$\frac{2}{5}$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

(1) 1 から 6 までのいずれかの目が出る事象は全事象なので、

$$\frac{6}{6} = 1$$

です。

(2) 4 の目が出る場合は 1 通りなので、

$$\frac{1}{6}$$

です。

(3) 0 の目が出る場合は 0 通りなので、

$$\frac{0}{6} = 0$$

です。

3 つの確率はそれぞれ $1, \frac{1}{6}, 0$ で、すべて 0 以上 1 以下です。