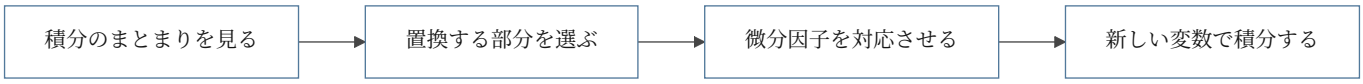
第 204 講 置換積分法

学習目標

この講では、置換積分法の考え方と計算手順を理解し、次のことができることを目標とする。
- 積分の中から置換するべきまとまりを見つけることができる。
- 置換した部分の微分因子を対応させ、積分全体を新しい変数で表すことができる。
- t を用いた積分を計算し、最後に元の変数へ戻すことができる。
- 求めた原始関数を微分して、計算結果を確認できる。

置換積分が必要になる理由

置換積分法は、合成関数の微分を逆向きに利用する考え方である。積分の中に複雑なまとまりがある場合、そのまとまりを新しい変数で表すことで、積分しやすい形へ変換する。
例えば、x^2+1 のようなまとまりが現れる場合、$t=x^2+1$ と置く。このとき、重要なのは単に文字を変更することではなく、置換した部分の微分が積分の中にどのように対応しているかを確認することである。
置換積分では、置換した部分とその微分因子を組にして考える。
置換した式の微分が、元の積分に含まれる因子と対応しているかを確認する。
$t=g(x)$ と置いた場合は、$dt=g'(x)dx$ という関係を利用して、積分全体を新しい変数で表すことが中心となる。



この対応によって、複雑な式を単純な積分へ変換できる。

置換する部分を選ぶ考え方

置換する部分は、微分すると積分の中に残っている因子が現れるものを選ぶ。
例えば、

$$\int 2x(x^2+1)^3\,dx$$

では、(x^2+1) を 1 つのまとまりとして見る。
(x^2+1) を微分すると $2x$ となり、積分の中に必要な因子が存在するため、置換が適している。

置換積分法の基本形

開区間 I で $g(x)$ が微分可能であり、$g(I)$ を含む区間で $F'(t)=f(t)$ を満たす原始関数 $F(t)$ を考える。
合成関数の微分から、次の等式が成り立つ。

$$(F(g(x)))'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$$

したがって、置換積分法の公式は次のようになる。

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$$

ここで C は、考えている区間ごとの任意の積分定数である。
この公式は $g'(x)$ で割って導くものではなく、合成関数の微分から得られる関係である。したがって、$g'(x)=0$ となる点が存在する場合でも、合成微分の関係自体は成立している。
置換積分では、$t=g(x)$ と置き、$dt=g'(x)dx$ という微分因子の対応を利用して、積分全体を新しい変数で表す。

置換積分の手順

置換積分は次の流れで処理する。
1. 内側のまとまりを t と置く。
2. 両辺を微分して dt を作る。
3. 積分する式をすべて t と dt で表す。
4. t について積分する。
5. 最後に t を元の式へ戻す。
6. 微分して確認する。

特に重要なのは、置換した部分だけでなく、積分全体を新しい変数へ移すことである。

置換による具体的な式の対応

置換積分では、置換した式と微分因子を対応させることで、元の積分を新しい変数の積分へ変換する。
例えば、$t=x^2+1$ と置くと、$dt=2xdx$ となる。この対応を使うと、次のような流れで計算できる。

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2+1)^3dx&=\int t^3dt\\&=\frac{t^4}{4}+C\\&=\frac{(x^2+1)^4}{4}+C\end{aligned}$$



置換積分では、t を単純に x へ変更するのではなく、置換した関係式を用いて元の変数の原始関数へ戻す。

微分による確認

置換積分で求めた結果は、最後に微分して元の被積分関数になるか確認する。
この確認では、置換した式を元へ戻した後の原始関数を微分する。微分結果が元の積分の中身と一致すれば、置換や係数の調整が正しかったことが分かる。
置換積分では、置換後の計算だけでなく、最後の微分確認までを 1 つの手順として扱うことが重要である。

例題 1：基本的な置換積分

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 2x(x^2+3)^4\,dx$$

例題 1 の解答・解説

積分の中のまとまり x^2+3 に注目する。
$t=x^2+3$ と置くと、$dt=2x\,dx$ である。
置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2+3)^4\,dx &= \int t^4\,dt \\ &= \frac{t^5}{5}+C \\ &= \frac{(x^2+3)^5}{5}+C\end{aligned}$$

結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+3)^5}{5}\right)=2x(x^2+3)^4$$

例題 2：一次式の置換

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (3x-2)^5\,dx$$

例題 2 の解答・解説

一次式全体を置換する。
$t = 3x - 2$ と置くと、$dt = 3dx$ である。
置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int (3x-2)^5 dx &= \frac{1}{3}\int t^5 dt \\ &= \frac{t^6}{18} + C \\ &= \frac{(3x-2)^6}{18} + C\end{aligned}$$

結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(3x-2)^6}{18}\right) = (3x-2)^5$$

例題 3：分母を含む置換積分

次の不定積分を求めなさい。

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

例題 3 の解答・解説

分母の式 x^2+1 に注目する。自然対数を log と書く。
$t = x^2 + 1$ と置くと、$dt = 2xdx$ である。
置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2+1} dx &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log|\ t\ | + C \\ &= \log|\ x^2+1\ | + C\end{aligned}$$

ここで $x^2 + 1 > 0$ であるため、$\log|\ x^2+1\ | = \log(x^2+1)$ と書ける。
結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\log(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1}$$

演習問題 1 基本的なまとまりの置換

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 3x^2(x^3+2)^5 dx$$

演習問題 2 一次式の係数を含む置換

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (4x+1)^3 dx$$

演習問題 3 分母の式を置換する積分

次の不定積分を求めなさい。

$$\int \frac{6x}{(x^2+4)^2} dx$$

演習問題 4 平方根を含む置換

次の不定積分を求めなさい。

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

演習問題 5 置換後に定数因子を調整する積分

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (2x-3)^4 x dx$$

ただし、置換後に残る x は置換した式を利用して表すこと。

演習問題 6 対数が現れる置換積分

$0 < x < 1$ または $x > 1$ のいずれか 1 つの区間で考える。自然対数を $\log$ と書く。
次の不定積分を求めなさい。

$$\int \frac{1}{x \log x} dx$$

演習問題 7 誤った置換の修正

次の積分について、ある生徒は

$$\int x(x^2+1)^3 dx$$

に対して $t = x^2 + 1$ と置いた後、

$$dt = x dx$$

として計算した。
この計算の誤りを説明し、正しい不定積分を求めなさい。

©ミライコーチング

演習問題 8 複数の置換候補から判断する積分

$x < -1$ または $x > -1$ のいずれか 1 つの区間で考える。
次の不定積分を求めなさい。

$$\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$$

演習問題 1 の解答・解説

積分の中のまとまり x^3+2 に注目する。
$t = x^3+2$ と置くと、$dt = 3x^2dx$ である。
置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int 3x^2(x^3+2)^5dx &= \int t^5dt \\ &= \frac{t^6}{6}+C \\ &= \frac{(x^3+2)^6}{6}+C\end{aligned}$$

結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^3+2)^6}{6}\right) = 3x^2(x^3+2)^5$$

演習問題 2 の解答・解説

一次式全体を置換する。
$t = 4x+1$ と置くと、$dt = 4dx$ である。
置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int (4x+1)^3dx &= \frac{1}{4}\int t^3dt \\ &= \frac{t^4}{16}+C \\ &= \frac{(4x+1)^4}{16}+C\end{aligned}$$

結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(4x+1)^4}{16}\right) = (4x+1)^3$$

演習問題 3 の解答・解説

分母の式 x^2+4 を置換する。
$t=x^2+4$ と置くと、$dt=2xdx$ である。
置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int \frac{6x}{(x^2+4)^2}dx &= 3\int t^{-2}dt \\ &= -\frac{3}{t}+C \\ &= -\frac{3}{x^2+4}+C\end{aligned}$$

結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{x^2+4}\right)=\frac{6x}{(x^2+4)^2}$$

演習問題 4 の解答・解説

平方根の中の式を置換する。
$t=x^2+1$ と置くと、$dt=2xdx$ である。
置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \sqrt{t}+C \\ &= \sqrt{x^2+1}+C\end{aligned}$$

結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

演習問題 5 の解答・解説

一次式を置換する。
$t = 2x - 3$ と置くと、$dt = 2dx$ である。
残る x は次のように表せる。

$$x = \frac{t+3}{2}$$

置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int (2x-3)^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\int t^4(t+3)\,dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{t^6}{6} + \frac{3t^5}{5}\right) + C \\ &= \frac{(2x-3)^6}{24} + \frac{3(2x-3)^5}{20} + C\end{aligned}$$

結果を微分して確認する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x-3)^6}{24} + \frac{3(2x-3)^5}{20}\right) &= \frac{1}{4}(2x-3)^5 \cdot 2 + \frac{3}{4}(2x-3)^4 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{2}(2x-3)^5 + \frac{3}{2}(2x-3)^4 \\ &= \frac{1}{2}(2x-3)^4(2x-3+3) \\ &= x(2x-3)^4\end{aligned}$$

検算結果は元の被積分関数に一致する。

演習問題 6 の解答・解説

自然対数を log とし、$t = \log x$ と置く。微分因子の対応は次の式で与えられる。

$$dt = \frac{1}{x}dx$$

置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\log x}dx &= \int \frac{1}{t}dt \\ &= \log|\ t\ | + C \\ &= \log|\log x\ | + C\end{aligned}$$

$0 < x < 1$ または $x > 1$ の区間では $\log x \neq 0$ であり、同じ区間内で任意定数を定める。
結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\log|\log x\ | = \frac{1}{x\log x}$$

演習問題 7 の解答・解説

誤りは、置換後の微分関係を正しく対応させていない点にある。
$t = x^2 + 1$ と置くと、$dt = 2xdx$ である。したがって、残る因子は次のように表す。

$$xdx = \frac{1}{2}dt$$

置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int x(x^2+1)^3 dx &= \frac{1}{2}\int t^3 dt \\ &= \frac{t^4}{8} + C \\ &= \frac{(x^2+1)^4}{8} + C\end{aligned}$$

結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+1)^4}{8}\right) = x(x^2+1)^3$$

演習問題 8 の解答・解説

分母の式 $x^3 + 1$ を置換する。
$t = x^3 + 1$ と置くと、$dt = 3x^2 dx$ である。
置換して積分し、元の変数へ戻すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx &= \frac{1}{3}\int t^{-2} dt \\ &= -\frac{1}{3t} + C \\ &= -\frac{1}{3(x^3+1)} + C\end{aligned}$$

$x < -1$ または $x > -1$ の区間では $x^3 + 1 \neq 0$ であり、同じ区間内で任意定数を定める。
結果を微分すると元の被積分関数に一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3(x^3+1)}\right) = \frac{x^2}{(x^3+1)^2}$$