

第 88 講 剰余の定理と因数定理

学習目標

- 多項式を $x - a$ で割った余りを、実際に割り算をせずに求められる。
- 剰余の定理が $P(x) = (x - a)Q(x) + r$ から導かれる理由を説明できる。
- $P(a) = 0$ かどうかを調べ、 $x - a$ が多項式の因数であるかを判定できる。
- 因数定理を利用して、文字を含む係数や多項式の因数分解を扱える。

多項式の割り算を式で表す

多項式 $P(x)$ を一次式 $x - a$ で割ることを考える。

割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを r とすると、

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r$$

と表せる。

割る式 $x - a$ は 1 次式であるため、余りの次数は 1 より小さくなければならない。したがって、余り r は x を含まない定数である。

この式には、割り算そのものを行わなくても余りだけを取り出せる仕組みが隠れている。

なぜ $x = a$ を代入するのか

多項式の割り算を表す式

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r$$

で、 $x = a$ を代入する。

すると $x - a = 0$ になるため、

$$\begin{aligned} P(a) &= (a - a)Q(a) + r \\ &= 0 \cdot Q(a) + r \\ &= r \end{aligned}$$

となる。

つまり、商 $Q(x)$ がどのような多項式であっても、 $x = a$ を代入すれば商を含む部分が消える。このため、余りだけを直接求められるのである。

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を $x - a$ で割ったときの余りは

$$P(a)$$

である。

したがって、余りだけを求めたい場合は、多項式の割り算を最後まで行う必要はなく、 $P(x)$ に $x = a$ を代入すればよい。

$x + a$ で割る場合

$x + a$ は

$$x + a = x - (-a)$$

と考える。

したがって、多項式 $P(x)$ を $x + a$ で割った余りは $P(-a)$ である。
符号を取り違えて $P(a)$ を計算しないように注意する必要がある。

余りが 0 になると何が起こるか

剰余の定理より、多項式 $P(x)$ を $x - a$ で割った余りは $P(a)$ である。
もし $P(a) = 0$ なら、余りが 0 なので、

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

と表せる。これは $P(x)$ が $x - a$ で割り切れることを意味するため、 $x - a$ は $P(x)$ の因数である。
逆に、 $x - a$ が $P(x)$ の因数なら、

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

と表せる。この式に $x = a$ を代入すると、

$$P(a) = 0$$

となる。

この二つの向きがどちらも成り立つため、「 $P(a) = 0$ 」と「 $x - a$ が因数である」は同値である。

因数定理

$P(x)$ を多項式、 a を定数とする。

このとき、次の二つは同値である。

- $P(a) = 0$ である。
- $x - a$ は $P(x)$ の因数である。

したがって、 $x - a$ が因数かどうかを調べるには、 $P(a)$ を計算して 0 になるかを確認すればよい。

剰余の定理と因数定理のつながり

剰余の定理では、 $P(a)$ は「 $x - a$ で割った余り」を表す。

その余りが 0 になる特別な場合が因数定理である。

したがって、判断の流れは次のようになる。

1. $x - a$ に注目する。
2. $P(a)$ を計算する。
3. 余りを求める問題なら、その値が答えである。
4. 因数かどうかを調べる問題なら、その値が 0 かを確認する。

一般の一次式で割る場合

$m \neq 0$ として、多項式 $P(x)$ を一次式 $mx + n$ で割る。商を $Q(x)$ 、余りを r とすれば、

$$P(x) = (mx + n)Q(x) + r$$

である。割る式が 0 になる $x = -\frac{n}{m}$ を代入すれば商を含む部分が消えるため、余りは次の値である。

$$P\left(-\frac{n}{m}\right) = r$$

例題

例題 1：剰余の定理を使う

多項式

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

を $x - 2$ で割ったときの余りを求めよ。

例題 1 の解答・解説

$x - 2$ で割るため、剰余の定理より余りは $P(2)$ である。

$$\begin{aligned} P(2) &= 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 \\ &= 16 - 12 + 8 - 5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

したがって、余りは 7 である。

実際の多項式の割り算を行わなくても、 $x = 2$ を代入するだけで余りを求められる。

例題 2：因数であるかを判定する

多項式

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

について、 $x - 2$ が $P(x)$ の因数であることを確かめ、 $P(x)$ を因数分解せよ。

例題 2 の解答・解説

因数定理を使うため、 $P(2)$ を計算する。

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 \\ &= 8 - 16 + 2 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P(2) = 0$ なので、因数定理より $x - 2$ は $P(x)$ の因数である。

$P(x)$ を $x - 2$ で割ると、商は $x^2 - 2x - 3$ である。したがって、

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$$

となる。

さらに、

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

であるから、

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$$

である。

例題 3：因数になるように係数を決める

多項式

$$P(x) = 2x^3 + kx^2 - 7x + 3$$

について、 $x + 1$ が $P(x)$ の因数となるように定数 k の値を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$x + 1 = x - (-1)$ である。

$x + 1$ が因数であるための条件は、因数定理より $P(-1) = 0$ である。

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2(-1)^3 + k(-1)^2 - 7(-1) + 3 \\ &= -2 + k + 7 + 3 \\ &= k + 8 \end{aligned}$$

したがって、

$$k + 8 = 0$$

である。

よって、 $k = -8$ である。

実際に $k = -8$ を代入すると $P(-1) = 0$ となるため、条件を満たしている。

演習問題**演習 1**

多項式

$$P(x) = 3x^3 - 2x + 5$$

を $x - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

演習 2

多項式

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$$

を $x + 2$ で割ったときの余りを求めよ。

演習 3

多項式

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$$

について、 $x - 3$ が $P(x)$ の因数であるかを調べよ。

演習 4

多項式

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$$

について、 $x + 1$ が $P(x)$ の因数であることを調べよ。

演習 5

多項式

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 6$$

について、 $x - 2$ が $P(x)$ の因数となるように定数 k の値を求めよ。

演習 6

多項式

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

について、 $x - 1$ が因数であることを因数定理で確かめたうえで、 $P(x)$ を因数分解せよ。

演習 7

多項式

$$P(x) = 4x^3 - 3x + 2$$

を $2x - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

演習問題の解答・解説**演習 1 の解答・解説**

$x - 1$ で割るため、剰余の定理より余りは $P(1)$ である。

$$\begin{aligned} P(1) &= 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 + 5 \\ &= 3 - 2 + 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

したがって、余りは 6 である。

演習 2 の解答・解説

$x + 2 = x - (-2)$ であるため、剰余の定理より余りは $P(-2)$ である。

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2(-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2) + 1 \\ &= -16 + 4 + 8 + 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

したがって、余りは -3 である。

演習 3 の解答・解説

$x - 3$ が因数であるかを調べるため、 $P(3)$ を計算する。

$$\begin{aligned}P(3) &= 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 9 \\&= 27 - 45 + 9 + 9 \\&= 0\end{aligned}$$

$P(3) = 0$ なので、因数定理より $x - 3$ は $P(x)$ の因数である。

演習 4 の解答・解説

$x + 1 = x - (-1)$ であるため、 $P(-1)$ を計算する。

$$\begin{aligned}P(-1) &= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 8(-1) - 4 \\&= -2 + 1 + 8 - 4 \\&= 3\end{aligned}$$

$P(-1) \neq 0$ なので、因数定理より $x + 1$ は $P(x)$ の因数ではない。
この場合、 $P(-1) = 3$ は $P(x)$ を $x + 1$ で割ったときの余りでもある。

演習 5 の解答・解説

$x - 2$ が因数となる条件は、因数定理より $P(2) = 0$ である。

$$\begin{aligned}P(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2k + 6 \\&= 8 - 8 + 2k + 6 \\&= 2k + 6\end{aligned}$$

したがって、

$$2k + 6 = 0$$

である。

よって、 $k = -3$ である。

実際に $k = -3$ とすると $P(2) = 0$ となるため、 $x - 2$ が因数になる。

演習 6 の解答・解説

$x - 1$ が因数であるかを調べるため、 $P(1)$ を計算する。

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 \\ &= 1 + 2 - 1 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P(1) = 0$ なので、因数定理より $x - 1$ は $P(x)$ の因数である。

$P(x)$ を $x - 1$ で割ると、商は $x^2 + 3x + 2$ である。したがって、

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

となる。

さらに、

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

であるから、

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

である。

展開すると $x^3 + 2x^2 - x - 2$ に戻るため、因数分解は正しい。

演習 7 の解答・解説

割る式 $2x - 1$ が 0 になるのは $x = \frac{1}{2}$ のときである。

多項式を

$$P(x) = (2x - 1)Q(x) + r$$

と表し、 $x = \frac{1}{2}$ を代入すると、余り r は $P(\frac{1}{2})$ に等しい。

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

したがって、余りは 1 である。