第 254 講 複素数と回転

学習目標

- 絶対値が 1 の複素数を掛けることが、原点中心の回転を表す理由を説明できる。
- 回転の向きと角の符号を対応させ、回転後の複素数を求められる。
- 任意の点を中心とする回転を「平行移動、回転、平行移動」の順で式にできる。
- 中心が与えられたとき回転角を、回転角が与えられたとき中心を求められる。

1. 絶対値 1 の複素数を掛ける

積では距離を掛け、偏角を加える

$z \neq 0$ を $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$、$u = \cos\theta + i\sin\theta$ とする。$|\,u\,| = 1$ であるから、積の公式より

$$uz = r\{\cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)\}$$

となる。原点からの距離 r は変わらず、偏角だけが θ 増える。したがって、u を掛ける操作は原点を中心とする角 θ の回転である。

$z = 0$ のときも $uz = 0$ であり、原点は動かない。ただし、0 の偏角を用いて説明しているのではなく、積が 0 になることから分かる事実である。

原点中心の回転

複素数 z に対応する点を、原点を中心として角 θ だけ回転した点に対応する複素数は

$$z' = (\cos\theta + i\sin\theta)z$$

である。$\theta > 0$ は反時計回り、$\theta < 0$ は時計回りを表す。角は 2π の整数倍だけ異なっても同じ回転を表す。

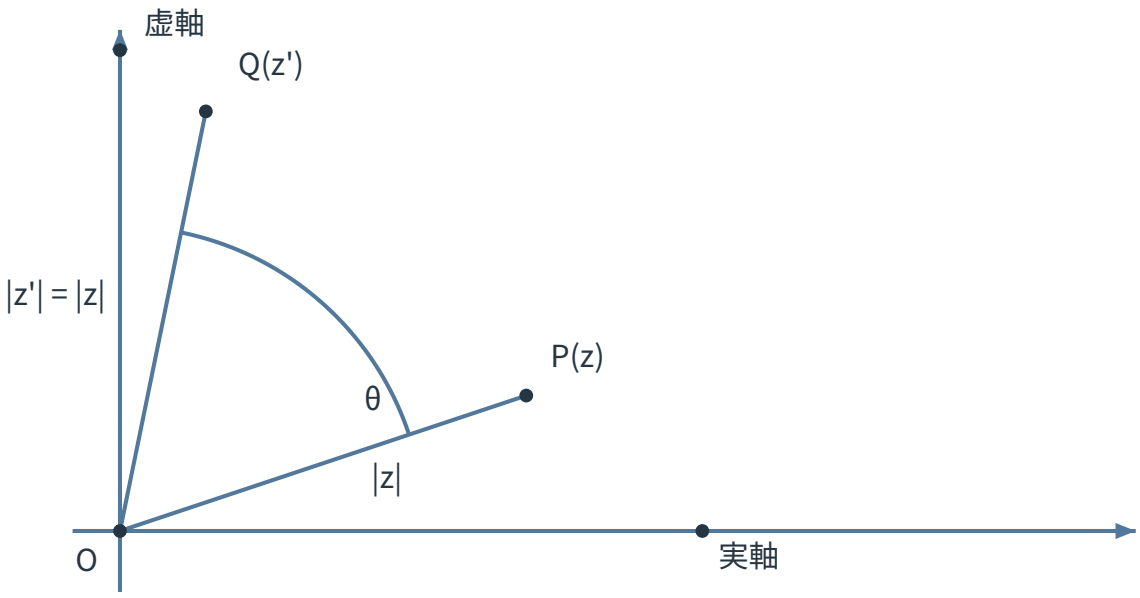

図 1　$\theta > 0$ のとき、z は長さを保って反時計回りに θ 回転する

例題 1：原点中心の回転

$z = 1 + \sqrt{3}i$ に対応する点を、原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{6}$ 回転した点に対応する複素数を求めよ。

例題 1 の解答・解説

回転を表す複素数は

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

である。よって、求める複素数は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right) = 2i$$

である。実際、$|\,1 + \sqrt{3}i\,| = |\,2i\,| = 2$ であり、偏角は $\frac{\pi}{3}$ から $\frac{\pi}{2}$ へ $\frac{\pi}{6}$ 増えている。

2. 回転の向きと特別な角

時計回りでは角を負にする

時計回りに ϕ 回転するなら $\theta = -\phi$ とし、$\cos\phi - i\sin\phi$ を掛ける。特に、i を掛けると反時計回りに $\frac{\pi}{2}$、$-i$ を掛けると時計回りに $\frac{\pi}{2}$、-1 を掛けると π 回転する。

例題 2：時計回りの回転

$z = -2 + i$ に対応する点を、原点を中心として時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転した点に対応する複素数を求めよ。

例題 2 の解答・解説

時計回りに $\frac{\pi}{2}$ の回転を表す複素数は

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

である。したがって、

$$z' = (-i)(-2 + i) = 1 + 2i$$

である。座標で見ると $(-2, 1)$ が $(1, 2)$ に移り、長さも保たれている。

係数の絶対値を確認する

az が回転だけを表すのは $|\,a\,| = 1$ のときである。$|\,a\,| \neq 1$ なら、回転と同時に原点からの距離が $|\,a\,|$ 倍される。例えば $2iz$ は $\frac{\pi}{2}$ の回転に加えて距離を 2 倍する。

3. 任意の点を中心とする回転

中心をいったん原点へ移す

回転の中心を表す複素数を c、動かす点を表す複素数を z とする。$z-c$ は、中心 c から点 z へ向かうベクトルに対応する。これを原点中心に角 θ 回転すると

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(z-c)$$

となる。最後に c を加えて元の位置へ戻すので、回転後の複素数 z' は

$$z'=c+(\cos\theta+i\sin\theta)(z-c)$$

である。これは「c を引く、回転を掛ける、c を加える」という順序である。

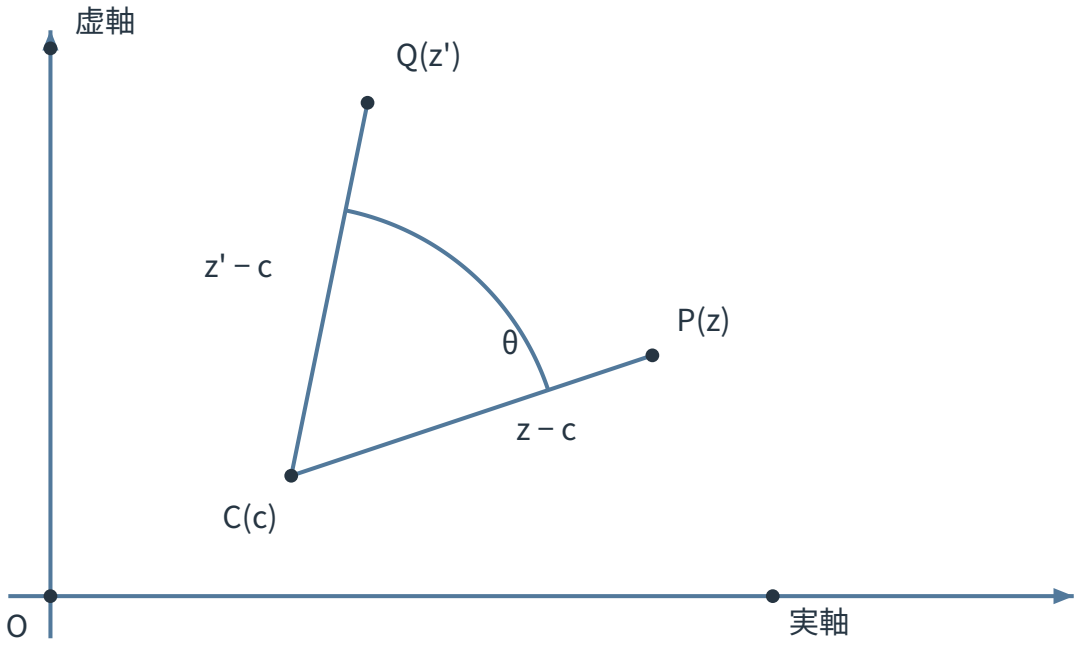

図 2　中心 $C(c)$ を原点とみなして、ベクトル $z-c$ を回転する

例題 3：任意の中心の回転

$z=4+i$ に対応する点を、$c=1+i$ に対応する点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転した点に対応する複素数を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$\frac{\pi}{2}$ の回転を表す複素数は i である。まず中心を引くと

$$z-c=(4+i)-(1+i)=3$$

である。これを回転して中心を戻すと、

$$z'=c+i(z-c)=1+i+3i=1+4i$$

となる。中心からの距離は回転前後とも 3 であり、$z-c=3$ の向きから $z'-c=3i$ の向きへ反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転している。

©ミライコーチング

中心自身は動かない

$z=c$ を回転の式に代入すると $z'=c$ となる。中心はどの角で回転しても動かない固定点である。逆に、$\theta \neq 2k\pi$（k は整数）の回転で $z'=z$ なら、$z=c$ である。

4. 回転前後の点から角を読む

中心から見た商をとる

$z \neq c$ とし、中心 c のまわりの回転で z が z' に移ったとする。回転の式を変形すると

$$z'-c=(\cos\theta+i\sin\theta)(z-c)$$

であるから、

$$\frac{z'-c}{z-c}=\cos\theta+i\sin\theta$$

となる。よって商の絶対値が 1 であることは回転で移せるための必要十分条件であり、その偏角が回転角である。すなわち

$$\theta \equiv \arg\left(\frac{z'-c}{z-c}\right) \pmod{2\pi}$$

である。商の分母が 0 にならないように $z \neq c$ が必要である。

例題 4：回転角を求める

$c=1$ を中心とする回転によって、$z=2+i$ が $z'=2-i$ に移った。回転角を $-\pi<\theta\leq\pi$ の範囲で求めよ。

例題 4 の解答・解説

中心から見た商は

$$\frac{z'-c}{z-c}=\frac{1-i}{1+i}=-i$$

である。$|-i|=1$ であり、$-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ だから、

$$\theta=-\frac{\pi}{2}$$

である。したがって、時計回りに $\frac{\pi}{2}$ の回転である。

5. 回転の中心を求める

回転の式を中心について解く

$u=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。$\theta \neq 2k\pi$（k は整数）、すなわち $u \neq 1$ のとき、

$$z'=c+u(z-c)=uz+(1-u)c$$

より、

$$c=\frac{z'-uz}{1-u}$$

を得る。角が 0 の回転は恒等変換であり、すべての点が動かないので、この式で一つの中心を定めることはできない。

6. 演習

演習 1：原点中心の回転

$z=\sqrt{3}+i$ に対応する点を、原点を中心として反時計回りに $2\frac{\pi}{3}$ 回転した点に対応する複素数を求めよ。

演習 2：任意の中心と時計回り

$z=3+2i$ に対応する点を、$c=1$ に対応する点を中心として時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転した点に対応する複素数を求めよ。

演習 3：回転角を読む

$c=-i$ を中心とする回転によって、$z=1-i$ が $z'=-1-i$ に移った。回転角を $0\leq\theta<2\pi$ の範囲で求めよ。

演習 4：図形全体の回転

$c=1+i$ を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転するとき、$z_1=3+i$、$z_2=1+2i$ の像をそれぞれ求めよ。

演習 5：回転の中心

点 $z=1$ を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転すると点 $z'=2+i$ に移る。この回転の中心を求めよ。

演習 6：回転で移るかを判定する

$c=1+i$ とする。$z=3+i$ を中心 c のまわりに回転して $z'=1+4i$ へ移すことができるか。理由とともに答えよ。

演習 1 の解答・解説

回転を表す複素数は

$$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。したがって、

$$z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)=-\sqrt{3}+i$$

である。

演習 2 の解答・解説

時計回りに $\frac{\pi}{2}$ なので $u=-i$ である。よって、

$$z'=c+u(z-c)=1-i\{(3+2i)-1\}=1-i(2+2i)=3-2i$$

である。

演習 3 の解答・解説

中心から見た商は

$$\frac{z'-c}{z-c}=\frac{-1}{1}=-1$$

である。$-1=\cos\pi+i\sin\pi$ だから、求める角は $\theta=\pi$ である。

演習 4 の解答・解説

$u=i$ である。したがって、

$$z_1{}'=c+i(z_1-c)=1+i+i\{(3+i)-(1+i)\}=1+3i$$

である。また、

$$z_2{}'=c+i(z_2-c)=1+i+i\{(1+2i)-(1+i)\}=i$$

である。同じ回転では、図形上の各点に同じ式を適用する。

演習 5 の解答・解説

$u=i$ であるから、

$$c=\frac{z'-uz}{1-u}=\frac{2+i-i}{1-i}=\frac{2}{1-i}=1+i$$

である。実際、$z-c=-i$、$z'-c=1$ であり、$i(z-c)=1=z'-c$ となる。

演習 6 の解答・解説

中心から見た商は

$$\frac{z'-c}{z-c}=\frac{3i}{2}$$

である。その絶対値は $\frac{3}{2}$ であり、1 ではない。中心からの距離が 2 から 3 に変わるため、回転だけで移すことはできない。

式を立てるときの確認事項

- 原点中心か、中心 c が別にあるかを先に確認する。
- 反時計回りを正、時計回りを負として角の符号を決める。
- 回転だけなら、中心からの距離が前後で等しいことを確かめる。
- 回転角は 2π の整数倍の違いをもつので、指定された範囲に直す。
- 中心から見た商を用いるときは、分母 $z-c$ が 0 でないことを確認する。

©ミライコーチング