

第 115 講 指数を整数から広げる

学習目標

指数を整数まで広げる考え方を理解し、0乗・負の指数の意味を説明できるようになる。

指数法則を保つために、 $a^0 = 1$ 、 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ と定める理由を説明できるようになる。

負の底を含む整数指数の計算で、括弧の有無や偶奇による符号の違いを判断できるようになる。

指数を整数の間へ広げる入口として、 $a^{\frac{1}{2}}$ が「2回掛けて a になる正の値」を表す考え方を理解する。

指数を広げる理由

指数は、もともと同じ数を繰り返し掛ける操作を短く表すために生まれた。

例えば、 3^4 は3を4回掛けた数であり、 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ を意味する。この考え方では指数は正の整数であった。

しかし、指数を変化させたときの規則を保とうとすると、指数を0や負の整数まで広げる必要が出てくる。

例えば、指数が1減ると値は底で割られる。

$3^3 = 27$ から指数を1つ下げると、 $3^2 = 27 \div 3 = 9$

さらに、 $3^1 = 9 \div 3 = 3$ となる。この流れを続けると、 3^0 では3で割って1になる必要がある。

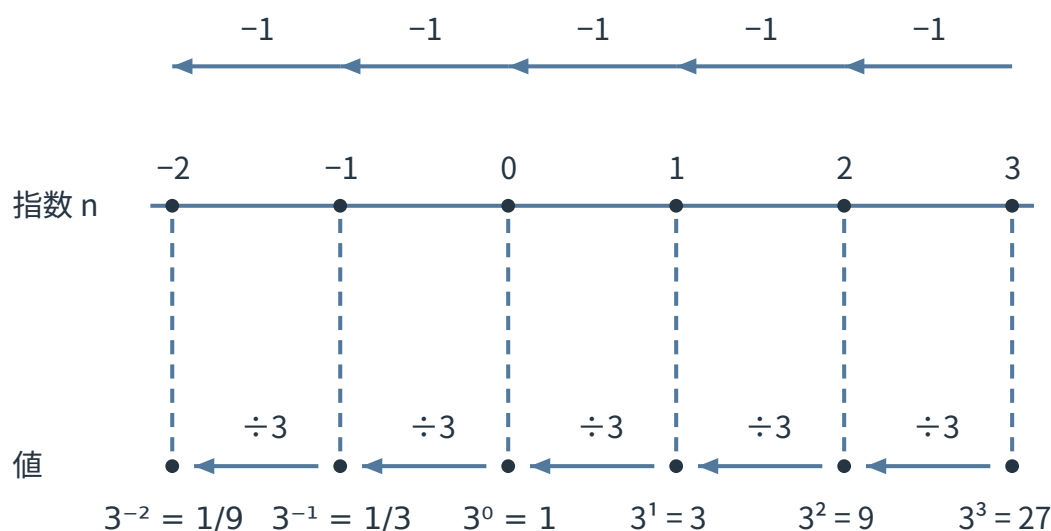


図1 右から左へたどると、指数は1ずつ減り、値は毎回3で割られる

このように、指数を下げる操作と割り算の関係を保つために、0乗や負の指数を定める。

ただし、 $a^0 = 1$ とするには底が0ではいけない。0で割ることができないためである。したがって、 $a^0 = 1$ は $a \neq 0$ のときだけ定義する。

0については、指数の種類によって扱いを分ける必要がある。正の整数 n に対しては、 $0^n = 0$ である。

一方、0の負指数は、負指数を逆数として定義しようとする分母が0になるため、定義できない。

また、この教材では 0^0 を定義しない。 $a^0 = 1$ の理由として使う $\frac{a^m}{a^m} = 1$ という考え方は、正の整数 m について $a = 0$ とすると、 $\frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$ となるため、0の場合には適用できない。

0 乗と負の指数

$a \neq 0$ のとき、指数法則を保つために次のように定める。

$$a^0 = 1$$

また、正の整数 n について、 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ と定める。

負の指数は「値が負になる」という意味ではない。指数が負になると、底の累乗の逆数を表す。

例えば、 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ であり、値が -8 になるわけではない。

負の指数を定める理由

負の指数の定義は、指数法則と矛盾しないように決められている。以後、 $a \neq 0$ 、 m は正の整数とする。

例えば、 a^m を a^m で割ると、同じ数を割っているので1になる。

一方で指数法則を使うと、 $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ となる。

したがって、 $a^0 = 1$ でなければ指数法則が成立し続けない。

さらに、 $\frac{a^2}{a^3}$ を考えると、分子と分母の同じ因子を消すことで、 $\frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}$ となる。

指数法則では、 $\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$ であるため、 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ と定める必要がある。

負の指数は、新しい計算規則を作ったのではなく、これまでの指数法則を保つための自然な拡張である。

指数の拡張で注意すること

指数の符号と値の符号は別のものである。

「0 乗だから0になる」は誤りであり、 $a \neq 0$ なら $a^0 = 1$ である。

「負指数だから負の値になる」は誤りであり、負指数は逆数を表す。

また、整数指数では負の底も扱えるが、この講で指数を広げる考え方では、正の底を中心に考える。負の底については、括弧の位置と指数の偶奇に注意する。

負の底と括弧

-2 を底にする場合、括弧の有無で意味が変わる。

$(-2)^2$ は、 -2 を2回掛けるので、 $(-2)^2 = 4$ となる。

一方で、 -2^2 は、指数計算を先に行うため、 $-(2^2) = -4$ である。

負の底を扱うときは、底に負号が含まれているかを括弧で確認する必要がある。

整数の間へ指数を広げる入口

さらに指数を整数の間へ広げると、 $\frac{1}{2}$ のような指数を考えることになる。ここでは底 $a > 0$ に限定し、正の値を保ちながら指数法則に整合するように指数の意味を広げる。

例えば、 $9^{\frac{1}{2}}$ を考える。

$9^{\frac{1}{2}} = q$ とすると、指数法則を保つためには、 $q \cdot q = 9$ となる必要がある。

つまり、 q は2回掛けると9になる正の値である。

この場合、 $q = 3$ である。

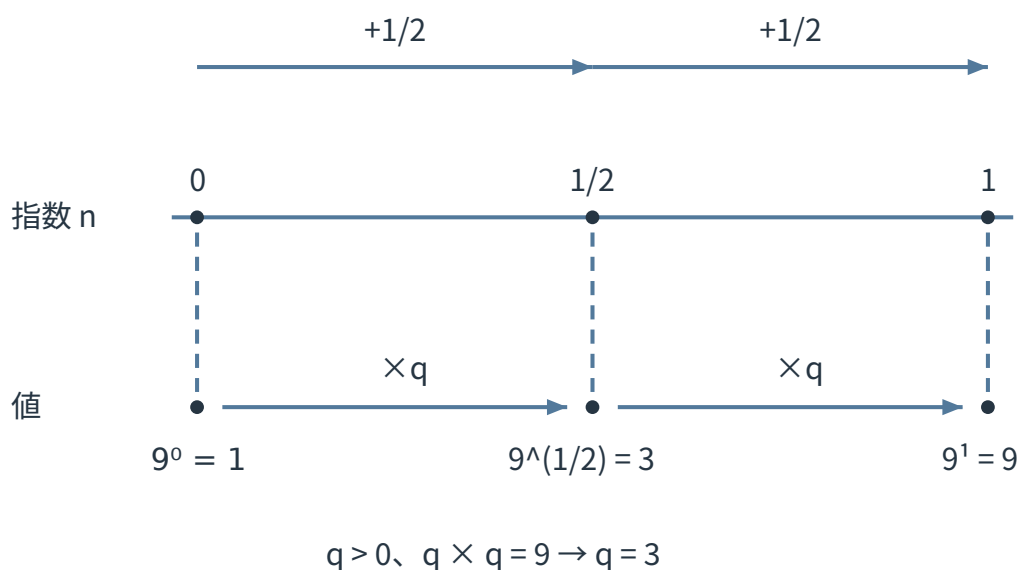


図2 指数の同じ半歩に、同じ正の倍率 q を対応させる

ここで重要なのは、 $q^2 = 9$ という方程式を解くことと、 $9^{\frac{1}{2}}$ を考えることは同じではないことである。 $q^2 = 9$ の解は3と-3の2つである。しかし、正の底で指数を広げる考え方では、正の値を選ぶ。この講では、一般の $\frac{m}{n}$ 指数の公式計算や無理数指数の厳密な定義までは扱わない。次の講で累乗根と有理数指数へ進むための入口として考える。

例題 1

3^0 、 3^{-1} 、 3^{-2} の値を求め、指数を1ずつ減らすと値を3で割る関係を説明しなさい。

例題 1 の解説

指数を1つ下げると、底で割る関係を利用する。

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \\ 3^0 &= 3 \div 3 = 1 \\ 3^{-1} &= 1 \div 3 = \frac{1}{3} \\ 3^{-2} &= \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

したがって、 $3^0 = 1$ 、 $3^{-1} = \frac{1}{3}$ 、 $3^{-2} = \frac{1}{9}$ である。

指数を下げる操作は、値を底で割る操作に対応している。その関係を保つために、 3^{-1} は $\frac{1}{3}$ と定められる。

負の指数を見て、値が負になると考えてはいけない。負指数は逆数を表している。

例題 2

$(-2)^{-2}$ 、 -2^{-2} 、 $(-2)^{-3}$ の値を求め、それぞれの違いを説明しなさい。

例題 2 の解説

まず、底が何であることを確認する。

$(-2)^{-2}$ では、底は -2 である。

$$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

次に、 -2^{-2} では負号は底に含まれず、指数計算の後につく。

$$-2^{-2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

最後に、 $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ である。

整理すると、 $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$ 、 $-2^{-2} = -\frac{1}{4}$ 、 $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$ となる。

負の底では、偶数乗なら正、奇数乗なら負になる。負指数では、その値の逆数を考えるため、まず整数指数部分の符号を確認してから逆数化する。

例題 3

$9^{\frac{1}{2}}$ の値を求めなさい。また、 $q^2 = 9$ の解との違いを説明しなさい。

例題 3 の解説

$9^{\frac{1}{2}} = q$ とおく。

指数の意味を広げると、 q を2回掛けたものが9になる。

$q \cdot q = 9$ である。

この条件を満たす正の値は、 $q = 3$ である。

したがって、 $9^{\frac{1}{2}} = 3$ となる。

一方で、方程式 $q^2 = 9$ を解くだけなら、 $q = 3, -3$ の2つの解がある。

しかし、 $9^{\frac{1}{2}}$ は指数を広げるための表現であり、正の値を選ぶ。ここが方程式の解を求めることとの違いである。

演習問題**0 乗と底の条件**

次の値を求め、定義できる理由または定義するときの条件を説明しなさい。

(1) 5^0

(2) $(-3)^0$

(3) 0^0

負整数指数の意味

次の値を求めなさい。

(1) 4^{-2}

(2) $(\frac{1}{3})^{-2}$

また、負の指数が値を負にするものではない理由を説明しなさい。

分数を底にした負指数

次の値を求めなさい。

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

(2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

負指数によってどのような操作が起きているか説明しなさい。

負の底と括弧

次の値を求め、括弧の有無による違いを説明しなさい。

(1) $(-4)^2$

(2) -4^2

(3) $(-4)^3$

(4) -4^3

0 の累乗と定義できない場合

次の式について、値を求められるものは求め、定義できないものはその理由を説明しなさい。

(1) 0^3

(2) 0^0

(3) 0^{-2}

指数法則を保つ定義

$a \neq 0$ とする。

(1) $\frac{a^3}{a^2}$ を指数法則を使って表し、 a^0 の値を求めなさい。

(2) $\frac{a^2}{a^4}$ を指数法則を使って表し、 a^{-2} が何を意味するか説明しなさい。

正の底の 1/2 指数

$16^{\frac{1}{2}}$ の値を求めなさい。

また、 $q^2 = 16$ の解と $16^{\frac{1}{2}}$ の値の違いを説明しなさい。

指数の意味を確認する

次の説明の誤りを指摘し、正しい考え方を書きなさい。

「 2^{-3} は指数が負なので、答えは -8 になる。」

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

(1) $5^0 = 1$ である。

底が 0 ではないとき、 $a^0 = 1$ と定めるためである。

(2) $(-3)^0 = 1$ である。

底は -3 であり 0 ではないため、0 乗の定義を使える。

(3) 0^0 は、この教材では定義しない。

0 乗の定義 $a^0 = 1$ を考えるときに使った $\frac{a^m}{a^m} = 1$ という考え方は、 $a = 0$ では $\frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$ となるため、0 の場合には適用できない。

したがって、この教材では 0^0 を定義せず、指数法則を扱う範囲を明確にする。

演習問題 2 の解答・解説

負指数は逆数を表す。

(1) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ である。

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$ である。

負指数は値を負にする操作ではない。指数の符号ではなく、逆数を取る操作を表している。

例えば、 2^{-3} は -8 ではなく、 $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ である。

演習問題 3 の解答・解説

分数を底にした場合も、負指数は逆数化を意味する。

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$ である。

(2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ である。

負指数では、底の分子と分母を入れ替えてから正の指数として計算すると考えるとよい。

演習問題 4 の解答・解説

括弧がある場合、負号を含んだ数全体が底になる。

(1) $(-4)^2 = 16$ である。

(2) $-4^2 = -(4^2) = -16$ である。

(3) $(-4)^3 = -64$ である。

(4) $-4^3 = -(4^3) = -64$ である。

2 乗では、負の数を 2 回掛けるため正になる。3 乗では、負の数を 3 回掛けるため負になる。

一方で、括弧がない -4^2 では指数計算を先に行い、その後で負号を付ける。

演習問題 5 の解答・解説

(1) $0^3 = 0$ である。

正の整数指数では、0 を 3 回掛けるため 0 になる。

(2) 0^0 は、この教材では定義しない。

0 乗の定義 $a^0 = 1$ には $a \neq 0$ という条件が必要であり、0 を底に含めることはできない。

(3) 0^{-2} は定義しない。

負指数では、 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ とするため、底が 0 の場合は 0 で割る形になる。

したがって、0 の正整数乗は扱えるが、 0^0 や 0 の負整数乗は別のものとして区別する。

演習問題 6 の解答・解説

(1)

指数法則を使うと、 $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$ となる。

一方で、同じ数を割っているので、 $\frac{a^3}{a^3} = 1$ である。

したがって、 $a^0 = 1$ となる。

(2) $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$ である。

また、 $\frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$ なので、 $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ となる。

負指数は、指数法則を保つために逆数として定義されている。

演習問題 7 の解答・解説

$16^{\frac{1}{2}} = q$ とすると、 q は2回掛けると16になる正の値である。

したがって、 $q = 4$ である。

一方で、 $q^2 = 16$ を解くだけなら、 $q = 4, -4$ の2つがある。

しかし、正の底で指数を広げる考え方では、 $16^{\frac{1}{2}}$ は正の値を選ぶ。この違いに注意する。

演習問題 8 の解答・解説

説明の誤りは、「負の指数だから値が負になる」と考えている点である。

正しい考え方は、負指数は逆数を表すということである。

したがって、 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ となる。

指数の符号と、計算結果の符号は別のものである。値が負になるかどうかは、負の底や奇偶などによって決まる。