

第 126 講 平均変化率と微分係数

学習目標

この講では、次のことができるようになることを目標とする。

- 2 点間の変化の割合を平均変化率として求め、その意味を説明できる。
- 1 点での変化の割合を考えるために、差分商を用いて微分係数を求められる。
- $h \neq 0$ の条件を保ちながら式変形を行い、 h を 0 に近づける考え方を理解できる。
- 平均変化率と微分係数が、それぞれ「区間全体の変化」と「一点での変化」を表すことを区別できる。

変化の割合を考える

関数 $y = f(x)$ において、 x の値が変化したときに y がどのように変化するかを見ることは、関数の特徴を調べる基本となる。

例えば、 x が a から b まで変化したとき、 x の変化量は $b - a$ である。ここでは $a \neq b$ とする。これに対して、 y の変化量は $f(b) - f(a)$ となる。

y の変化量を x の変化量で割った値を平均変化率という。異なる 2 点 $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$ に対する平均変化率は

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

で表される。

平均変化率は、2 点を結ぶ直線の傾きと同じ意味を持つ。この 2 点を結ぶ直線を割線という。平均変化率は正、負、0 のいずれにもなり、区間全体で見た変化の割合を表している。

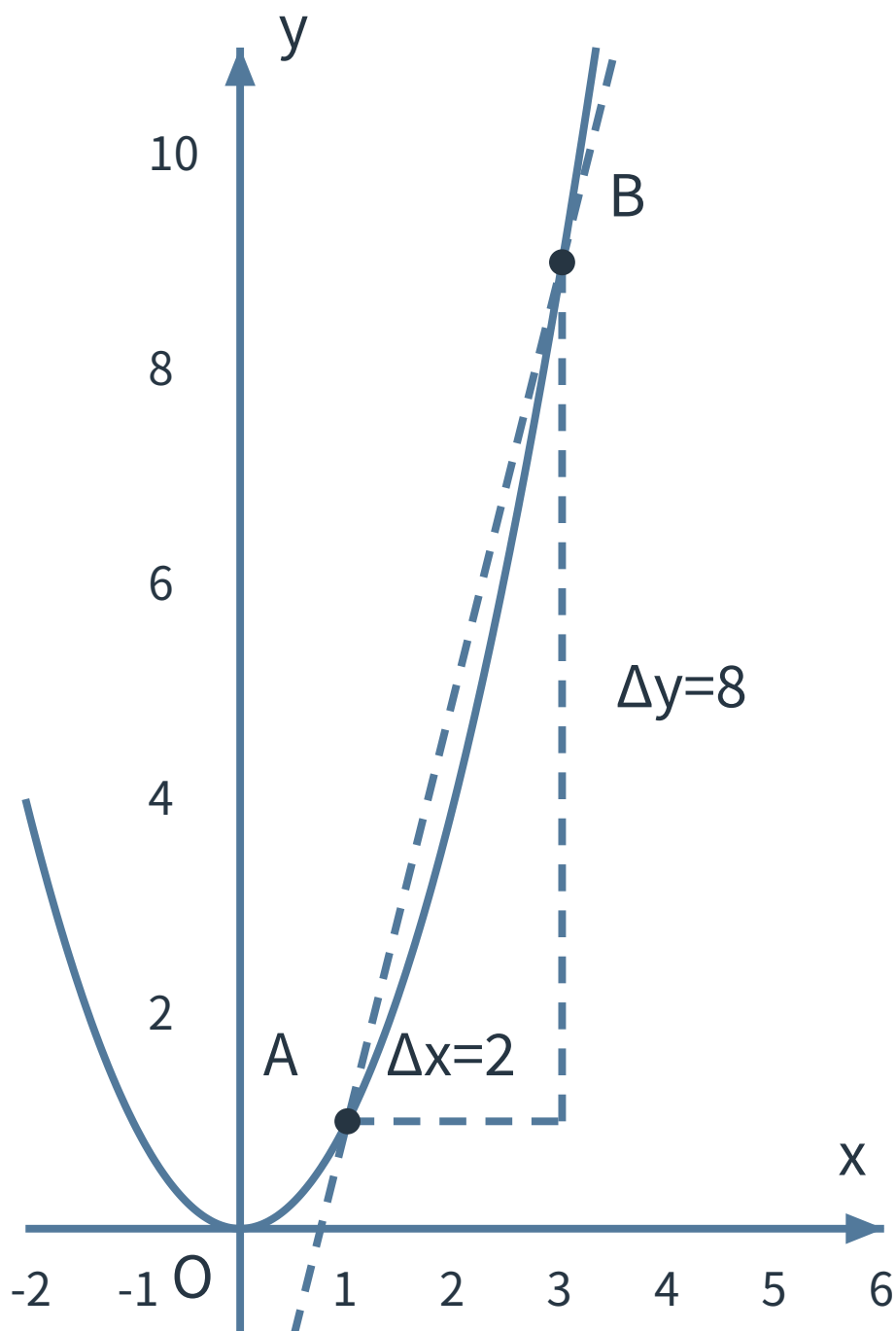


図1 実線は $y = x^2$ 、斜めの破線は割線 AB ($y = 4x - 3$)。横の増分は $\Delta x = 2$ 、縦の増分は $\Delta y = 8$ なので、割線の傾きは $\frac{8}{2} = 4$ 。
 一方で、ある 1 点だけでの変化の割合を知りたい場合がある。点 $(a, f(a))$ での変化を見るために、
 近くの点 $(a + h, f(a + h))$ を考える。
 この 2 点間の平均変化率は、次のように計算する。

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

ここで $h \neq 0$ である。 $h = 0$ とすると分母が 0 となり、差分商は定義できない。
 しかし、 h を 0 そのものにするのではなく、0 へ近づけたときの値を考えることができる。例えば、元の差分商に $h = 0$ を代入すると分母が 0 となり未定義である。一方、 $h \neq 0$ の条件で式変形を行った結果が $2 + h$ のように整理できた場合、その整理後の式について $h \rightarrow 0$ の極限を考えるために $h = 0$ を代入して値を求めることは正しい。この 2 つは異なる操作であり、差分商そのものへ 0 を代入することと、整理後の極限を計算することを混同してはいけない。
 このように、 h は正の値からも負の値からも 0 へ近づく。両側から近づけたとき、差分商が同じ有限の実数へ近づく場合に、その値を微分係数として定める。
 微分係数は、点 $(a, f(a))$ における瞬間の変化率を表している。

平均変化率と微分係数

関数 $y = f(x)$ において、異なる 2 点 $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$ に対して、 $a \neq b$ のとき平均変化率を

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

と定める。

また、 $x = a$ における微分係数は、 a の近くで関数 $f(x)$ が定義されているとき、次のように計算する。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

を考える。

ただし、この差分商では $h \neq 0$ である。 h を正の側から 0 へ近づけた場合と、負の側から 0 へ近づけた場合の両方で、差分商が同じ有限の実数へ近づくとき、その値を $f'(a)$ と定める。

このとき、関数は $x = a$ で微分可能であるという。

差分商の両側極限が存在しない場合は、 $f'(a)$ という値を割り当てない。

差分商を計算する流れ

微分係数を求めるときは、次の流れを意識することが重要である。

1. $f(a + h)$ を求める。
2. $f(a + h) - f(a)$ を計算する。
3. h で割る。
4. h を含む式を整理してから、 h を 0 に近づける。

特に、最初から $h = 0$ を代入してはいけない。途中で h が約分できる形に変形できるかを見ることがポイントである。

例えば $f(x) = x^2$ の場合、次のように計算する。

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

では、分子を展開すると h が因数として現れる。その h を約分することで、 $h \rightarrow 0$ を考えられる形になる。

また、 h は正の側からだけではなく、負の側からも 0 へ近づく。微分係数が存在するためには、両方から近づけた値が一致する必要がある。

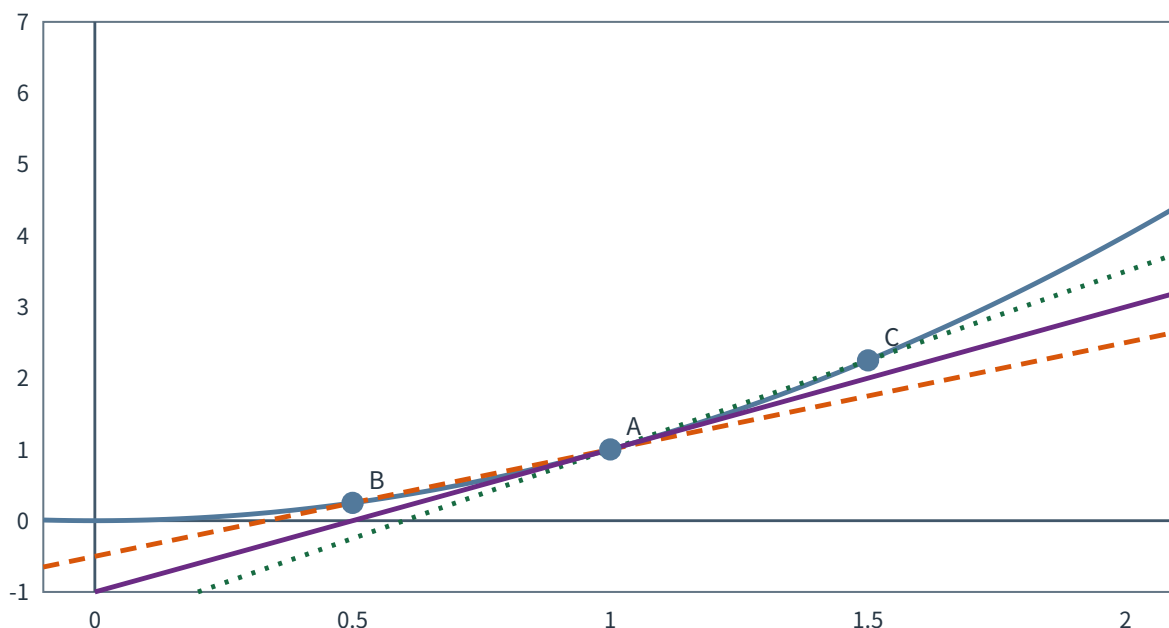


図2 曲線の実線は $y = x^2$ 。破線 AB は $h = -0.5$ で傾き 1.5、点線 AC は $h = 0.5$ で傾き 2.5。直線の実線は A における接線 $y = 2x - 1$ で、傾きは 2。有限の 2 本の割線の傾きは、どちらも 2 ではない。縦横の 1 単位の長さは異なるため、傾きは目盛りの値から読む。

微分可能であることと連続であることには関係があるが、この段階では、微分係数が求められるかどうかを差分商から判断することを重視する。

例題 1

関数 $f(x) = x^2$ について、 $x = 1$ から $x = 3$ までの平均変化率を求めよ。

例題 1 の解答・解説

平均変化率は、2 点間の y の変化量を x の変化量で割って求める。

ここでは、2 点の x 座標が 1 と 3 である。

$$\begin{aligned}\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} &= \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} \\ &= \frac{9 - 1}{2} \\ &= 4\end{aligned}$$

したがって、平均変化率は 4 である。

この値は、点 (1, 1) と点 (3, 9) を結ぶ直線の傾きを表している。区間全体で見た平均的な変化の割合であり、 $x = 1$ の一点での変化率ではないことに注意する。

例題 2

関数 $f(x) = x^2$ について、 $x = 1$ における微分係数を求めよ。

例題 2 の解答・解説

微分係数の定義を使う。

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

まず、それぞれの値を求める。

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^2 \\ &= 1 + 2h + h^2 \end{aligned}$$

また、 $f(1) = 1^2 = 1$ である。

したがって、差分商は

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2+h)}{h} \\ &= 2 + h \end{aligned}$$

ここで約分を行うためには $h \neq 0$ が必要である。これは、微分係数の定義で h を 0 そのものではなく、0 に近づけて考えているためである。

よって、 $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$ となる。

これは、点 $(1, 1)$ における瞬間の変化率を表している。 $2+h$ は h が正の場合でも負の場合でも、 h が 0 へ近づくと 2 へ近づく。例えば、 $h = -0.5$ のとき割線の傾きは 1.5、 $h = 0.5$ のとき割線の傾きは 2.5 であり、どちらも有限の h では接線の傾き 2 そのものではない。割線の傾きが両側から近づいていった極限が、点 $(1, 1)$ における接線の傾きになる。

例題 3

関数 $f(x) = x^3$ について、 $x = 1$ における微分係数を求めよ。

例題 3 の解答・解説

微分係数の定義から考える。

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

まず、次のように計算する。

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^3 \\ &= 1 + 3h + 3h^2 + h^3 \end{aligned}$$

である。また、 $f(1) = 1$ である。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}
 \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} \\
 &= \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} \\
 &= \frac{h(3 + 3h + h^2)}{h} \\
 &= 3 + 3h + h^2
 \end{aligned}$$

ここで $h \neq 0$ のもとで約分している。
 よって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

したがって、 $x = 1$ における微分係数は 3 である。

$3 + 3h + h^2$ は、 h が正の側から 0 へ近づく場合も負の側から 0 へ近づく場合も、3 へ近づく。したがって、 $x = 1$ における微分係数は 3 であり、点 $(1, 1)$ における接線の傾きを表している。

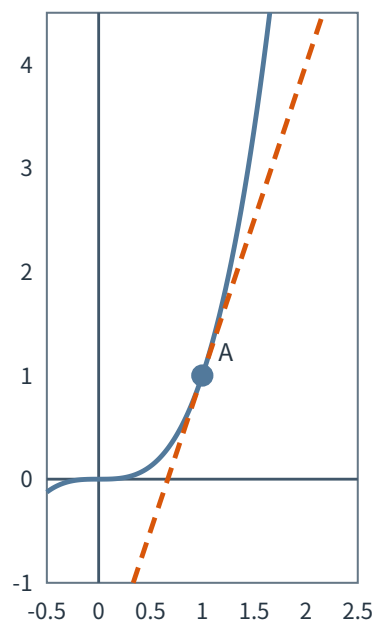


図 3 実線は $y = x^3$ 、破線は A における接線 $y = 3x - 2$ 。A 付近で割線の傾きを考え、その極限として得られる接線の傾きは 3。したがって、 $x = 1$ における微分係数は 3。

練習問題 1

関数 $f(x) = x^2$ について、次の平均変化率を求めよ。

- (1) $x = 2$ から $x = 5$ までの平均変化率
- (2) $x = -5$ から $x = -2$ までの平均変化率

練習問題 2

関数 $f(x) = -2x + 3$ について、 $x = 1$ における微分係数を定義から求めよ。

練習問題 3

関数 $f(x) = 5$ について、 $x = 4$ における微分係数を定義から求めよ。

練習問題 4

関数 $f(x) = x^2 - 3x$ について、 $x = 2$ における微分係数を定義から求めよ。

練習問題 5

関数 $f(x) = x^3$ について、 $x = -1$ における微分係数を定義から求めよ。

練習問題 6

関数 $f(x) = x^2 + 1$ について、 $x = 2$ における微分係数を求めるとき、次の計算方法が正しいか誤りかを説明せよ。

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

において、最初に $h = 0$ を代入する。

練習問題 7

関数 $f(x) = x^2$ について、 $f(2)$ と $f'(2)$ をそれぞれ求め、2つの値が表す意味の違いを説明せよ。

練習問題 8

関数 $f(x) = |x|$ について、 $x = 0$ における微分係数を考える。

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

を計算し、 $h > 0$ の場合と $h < 0$ の場合で値を比較して、微分係数が存在するか判断せよ。

練習問題 1 の解答・解説

平均変化率は、次のように計算する。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

で求める。

(1) $x = 2$ から $x = 5$ の場合、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} &= \frac{25 - 4}{3} \\ &= 7\end{aligned}$$

したがって、平均変化率は 7 である。

(2) $x = -5$ から $x = -2$ の場合、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\frac{f(-2) - f(-5)}{-2 - (-5)} &= \frac{4 - 25}{3} \\ &= -7\end{aligned}$$

したがって、平均変化率は -7 である。

平均変化率の正負は、2つの端点を比べたときの正味の変化を示している。今回のように $b > a$ のとき、平均変化率が正であれば終点の値が始点の値より大きく、負であれば終点の値が始点の値より小さいことを表す。ただし、平均変化率の符号だけで、その区間の途中でも常に増加または減少しているとは判断できない。

今回の $f(x) = x^2$ では、区間 $2 \leq x \leq 5$ では実際に増加しており、区間 $-5 \leq x \leq -2$ では実際に減少しているため、それぞれの平均変化率 7、 -7 と対応している。一般の関数では、平均変化率はあくまで端点間の変化を表す値であり、途中の細かな変化までは表さない。

この問題では平均変化率を求めており、一点での変化率である微分係数は求めていない。

練習問題 2 の解答・解説

微分係数の定義を使う。

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

それぞれの値を求める。

$$f(1+h) = -2(1+h) + 3 = 1 - 2h$$

$$f(1) = -2 + 3 = 1$$

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1 - 2h) - 1}{h} \\ &= \frac{-2h}{h} \\ &= -2\end{aligned}$$

ここで約分は $h \neq 0$ のもとで行っている。

よって、 $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (-2) = -2$ である。

一次式では、どの点でも変化の割合が一定であるため、微分係数も一定になる。

練習問題 3 の解答・解説

微分係数の定義を使う。

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

定数関数なので、 $f(4+h) = 5$

$f(4) = 5$ である。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \frac{5 - 5}{h} \\ &= \frac{0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$h \neq 0$ のもとで、この値は常に 0 である。

よって、 $f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$ である。

定数関数は、 x が変化しても y が変化しないため、変化率は 0 になる。

練習問題 4 の解答・解説

定義から求める。

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

まず、次のように計算する。

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^2 - 3(2+h) \\ &= 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h \\ &= h^2 + h - 2 \end{aligned}$$

また、 $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$ である。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(h^2 + h - 2) - (-2)}{h} \\ &= \frac{h^2 + h}{h} \\ &= \frac{h(h+1)}{h} \\ &= h+1 \end{aligned}$$

約分は $h \neq 0$ のもとで行っている。

よって、 $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1) = 1$ である。

練習問題 5 の解答・解説

微分係数の定義を使う。

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

まず、次のように計算する。

$$\begin{aligned} f(-1+h) &= (-1+h)^3 \\ &= -1 + 3h - 3h^2 + h^3 \end{aligned}$$

また、 $f(-1) = -1$ である。

したがって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{-1 + 3h - 3h^2 + h^3 - (-1)}{h} \\ &= \frac{3h - 3h^2 + h^3}{h} \\ &= \frac{h(3 - 3h + h^2)}{h} \\ &= 3 - 3h + h^2 \end{aligned}$$

約分は $h \neq 0$ のもとで行う。

よって、次のように計算する。

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} (3 - 3h + h^2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

練習問題 6 の解答・解説

最初に $h = 0$ を代入する方法は誤りである。

微分係数の定義では、次のように計算する。

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

を考えるが、分母が h であるため、 $h = 0$ を直接代入すると分母が 0 になる。

例えば、次のように計算する。

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 1 - (2^2 + 1)}{h}$$

であり、式を整理してから h を 0 に近づける。

$$\begin{aligned} &\frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 5}{h} \\ &= \frac{4h + h^2}{h} \\ &= 4 + h \end{aligned}$$

ここでも約分は $h \neq 0$ の条件で行っている。

その後で、 $\lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$ を考える。

したがって、 $h = 0$ の代入ではなく、差分商を整理してから極限を考えることが正しい。

練習問題 7 の解答・解説

まず $f(2)$ を求める。

$$f(2) = 2^2 = 4$$

これは、関数のグラフ上の点の高さを表している。

次に、 $f'(2)$ を求める。

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

計算すると、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \frac{h(4+h)}{h} \\ &= 4 + h \end{aligned}$$

よって、 $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$ である。

$f(2)$ は点 $(2, 4)$ の高さを表す値であり、 $f'(2)$ はその点での瞬間的な変化率を表す値である。

ここでの約分は $h \neq 0$ のもとで行っている。その後、 $\lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$ となる。

この例では $f(2) = 4$ と $f'(2) = 4$ が一致するが、これは偶然である。 $f(2)$ は関数の値を表し、 $f'(2)$ はその点での変化率を表すため、2つの意味は異なる。

練習問題 8 の解答・解説

差分商

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

を考える。

$h \neq 0$ であり、 $f(0) = 0$ なので、次のように計算する。

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$h > 0$ のとき、 $|h| = h$ なので、次のように計算する。

$$\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

一方、 $h < 0$ のとき、 $|h| = -h$ なので、次のように計算する。

$$\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

したがって、次のように計算する。

$$h > 0 : \frac{|h|}{h} = 1$$

$$h < 0 : \frac{|h|}{h} = -1$$

正の側から 0 へ近づけた値と、負の側から 0 へ近づけた値が一致しないため、差分商の有限の両側極限は存在しない。

よって、 $x = 0$ における微分係数は存在しない。

なお、 $|x|$ は $x = 0$ で連続であるが、連続であることだけから必ず微分可能とはいえない。