

GOAL この講でできるようになること

- $x^2 + (a+b)x + ab$ と $(x+a)(x+b)$ の関係を説明できる。
- $x^2 + px + q$ を見て、和が p 、積が q になる 2 数を探せる。
- 定数項の符号から、探す 2 数の符号を絞り込める。
- 見つけた 2 数を使って二次式を因数分解できる。
- 因数分解した結果を展開して確認できる。

EXPLANATION / 解説 展開すると和と積が現れる
乗法公式で、

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

を学びました。
この式を右から左へ読むと、

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

です。
つまり、

$$x^2 + 5x + 6$$

を因数分解するときは、 $a+b=5$ 、 $ab=6$ を同時に満たす 2 つの数 a, b を探せばよいことになります。
 $2+3=5$ 、 $2 \cdot 3=6$ なので、

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

です。
この因数分解では、真ん中の係数から「和」、定数項から「積」を読み取ることが中心になります。

POINT 探すのは和と積を同時に満たす 2 数
 $x^2 + px + q$ を

$$(x+a)(x+b)$$

の形に因数分解したいときは、 $a+b=p$ 、 $ab=q$ となる 2 数 a, b を探します。

例えば、 $x^2 + 7x + 12$ なら、

- 和が 7
- 積が 12

となる 2 数を探します。

3 と 4 なら、 $3+4=7$ 、 $3 \cdot 4=12$ なので、

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

です。

EXPLANATION / 解説 積から候補を作る

$x^2 + 11x + 24$ を考えます。

和が 11 になる 2 数を手当たり次第に探すより、積が 24 になる組を先に並べると見つけやすくなります。

正の整数の組は、

- 1 と 24
- 2 と 12
- 3 と 8
- 4 と 6

です。

この中で和が 11 になるのは 3 と 8 です。

したがって、

$$x^2 + 11x + 24 = (x+3)(x+8)$$

となります。

因数分解では、定数項の積の組を作り、その和を確認すると候補を整理できます。

EXPLANATION / 解説 積が正なら 2 数の符号は同じ

$x^2 - 9x + 20$ を考えます。

定数項 20 は正なので、探す 2 数の積は正です。

積が正になるのは、

- 正の数と正の数
- 負の数と負の数

のどちらかです。

さらに和が -9 なので、2 数はどちらも負である必要があります。

$(-4) + (-5) = -9$ 、 $(-4)(-5) = 20$ となります。

したがって、

$$x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$$

です。

POINT 定数項の符号で探す範囲を絞る

$x^2 + px + q$ で探す 2 数を a, b とします。

$q > 0$ のとき、 $ab > 0$ なので a, b の符号は同じです。

- $p > 0$ なら、2 数はともに正

- $p < 0$ なら、2 数はともに負

一方、 $q < 0$ のときは $ab < 0$ なので、2 数の符号は反対になります。

符号を先に判断すると、探す候補を大きく減らせます。

EXPLANATION / 解説 積が負なら符号は反対になる

$x^2 + x - 12$ を考えます。

積が -12 なので、探す 2 数は一方が正、もう一方が負です。

12 の因数の組を使って調べると、 $4 + (-3) = 1$ 、 $4 \cdot (-3) = -12$ です。

したがって、

$$x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$$

となります。

積が負の場合は、絶対値の大きい方の符号によって和の正負が決まります。

今回は和が正なので、絶対値の大きい 4 を正にします。

CAUTION / 注意 和だけ、積だけでは決められない

$x^2 + 8x + 15$ を因数分解するとき、3 と 5 を選ぶのは、 $3 + 5 = 8$ だけが理由ではありません。

$3 \cdot 5 = 15$ も同時に満たしています。

例えば 2 と 6 は和が 8 ですが、積は 12 なので使えません。

因数分解では、**和と積の両方が一致していることを必ず確認**します。

EXPLANATION / 解説 見つからないときは符号を整理する

$x^2 - 2x - 15$ を考えます。

積が -15 なので、2 数は異符号です。

15 の因数の組は 1 と 15、3 と 5 です。

和が -2 になるように符号を付けると、 $3 + (-5) = -2$ 、 $3 \cdot (-5) = -15$ となります。

したがって、

$$x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$$

です。

積が負のときは、符号を付ける前に絶対値の組を探し、そのあと和に合わせて正負を決めると整理しやすくなります。

POINT 因数分解の基本手順

$x^2 + px + q$ を因数分解するときは、次の順に考えます。

1. 積が q になる 2 数の候補を作る。

2. 和が p になる組を選ぶ。

3. 符号まで確認する。

4. $(x + a)(x + b)$ の形にする。

5. 展開して元の式へ戻るか確認する。

数字を勘だけで当てるのではなく、積から候補を整理すると安定して見つけられます。

例題 1 EXERCISE

$x^2 + 9x + 20$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題 1 の解答・解説

和が 9、積が 20 になる 2 数を探します。

20 の正の因数の組を調べると、4 と 5 について、 $4 + 5 = 9$ 、 $4 \cdot 5 = 20$ となります。

したがって、

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

です。

展開すると、

$$(x + 4)(x + 5) = x^2 + 9x + 20$$

となり、元の式へ戻ります。

例題 2 EXERCISE

$x^2 - 11x + 24$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題2の解答・解説

積が24で正、和が-11なので、探す2数はともに負です。
 $(-3) + (-8) = -11$ 、 $(-3)(-8) = 24$ です。
したがって、

$$x^2 - 11x + 24 = (x - 3)(x - 8)$$

となります。
定数項が正で真ん中の係数が負なら、2数がともに負になることを先に判断できます。

例題3 EXERCISE

$x^2 + 2x - 15$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題3の解答・解説

積が-15なので、2数の符号は反対です。
 $5 + (-3) = 2$ 、 $5 \cdot (-3) = -15$ となります。
したがって、

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

です。
積が負で和が正なので、絶対値の大きい5を正にすると条件に合います。

例題4 EXERCISE

$x^2 - 5x - 24$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題4の解答・解説

積が-24なので、探す2数は異符号です。
 $3 + (-8) = -5$ 、 $3 \cdot (-8) = -24$ となります。
したがって、

$$x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8)$$

です。
和が負なので、絶対値の大きい8を負にします。

SECTION 1 演習問題

練習問題 1 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 + 6x + 8$
- (2) $x^2 + 8x + 15$
- (3) $x^2 + 10x + 21$

練習問題 2 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 - 7x + 12$
- (2) $x^2 - 10x + 21$
- (3) $x^2 - 13x + 40$

練習問題 3 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 + x - 6$
- (2) $x^2 + 3x - 10$
- (3) $x^2 + 5x - 24$

練習問題 4 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 - x - 12$
- (2) $x^2 - 4x - 21$
- (3) $x^2 - 7x - 18$

練習問題 5 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 - 14x + 48$
- (2) $x^2 + 13x + 36$
- (3) $x^2 - 3x - 40$

練習問題 6 EXERCISE

次の A, B に入る正の整数を求め、因数分解を完成させなさい。

- (1) $x^2 + 11x + 30 = (x + A)(x + B)$
- (2) $x^2 - 9x + 14 = (x - A)(x - B)$
- (3) $x^2 + x - 20 = (x + A)(x - B)$

練習問題 7 EXERCISE

$x^2 - 2x - 35$ を因数分解するため、積が -35 となる 2 数を考えます。

次の組のうち、因数分解に使えるものを 1 つ選びなさい。

- ・ ア 5 と -7
- ・ イ 7 と -5
- ・ ウ 1 と -35
- ・ エ 35 と -1

練習問題 8 EXERCISE

ある生徒は、

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 1)(x + 10)$$

と因数分解しました。
誤りを説明し、正しく因数分解しなさい。

SECTION 2 演習問題の解答・解説

ANSWER / 解答 練習問題 1 の解答・解説

(1) 和が 6、積が 8 になる 2 数は 2 と 4 です。

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$

(2) 和が 8、積が 15 になる 2 数は 3 と 5 です。

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$$

(3) 和が 10、積が 21 になる 2 数は 3 と 7 です。

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$$

定数項が正で真ん中の係数も正なので、いずれも 2 数は正です。

ANSWER / 解答 練習問題 2 の解答・解説

(1) 積が 12 で和が -7 なので、2 数は -3 と -4 です。

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

(2) 積が 21 で和が -10 なので、2 数は -3 と -7 です。

$$x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$$

(3) 積が 40 で和が -13 なので、2 数は -5 と -8 です。

$$x^2 - 13x + 40 = (x - 5)(x - 8)$$

積が正で和が負の場合、探す 2 数はともに負です。

ANSWER / 解答 練習問題 3 の解答・解説

(1) 積が -6 で和が 1 になる 2 数は 3 と -2 です。

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

(2) 積が -10 で和が 3 になる 2 数は 5 と -2 です。

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$$

(3) 積が -24 で和が 5 になる 2 数は 8 と -3 です。

$$x^2 + 5x - 24 = (x + 8)(x - 3)$$

積が負なので、2 数の符号は反対です。和が正になるように、絶対値の大きい方を正にします。

ANSWER / 解答 練習問題 4 の解答・解説

(1) 積が -12 で和が -1 になる 2 数は 3 と -4 です。

$$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$$

(2) 積が -21 で和が -4 になる 2 数は 3 と -7 です。

$$x^2 - 4x - 21 = (x + 3)(x - 7)$$

(3) 積が -18 で和が -7 になる 2 数は 2 と -9 です。

$$x^2 - 7x - 18 = (x + 2)(x - 9)$$

積が負で和が負の場合は、絶対値の大きい方を負にします。

ANSWER / 解答 練習問題 5 の解答・解説

(1) 積が 48 で和が -14 になる 2 数は -6 と -8 です。

$$x^2 - 14x + 48 = (x - 6)(x - 8)$$

(2) 積が 36 で和が 13 になる 2 数は 4 と 9 です。

$$x^2 + 13x + 36 = (x + 4)(x + 9)$$

(3) 積が -40 で和が -3 になる 2 数は 5 と -8 です。

$$x^2 - 3x - 40 = (x + 5)(x - 8)$$

数字が大きくなっても、積の因数の組を整理してから和を確認する手順は同じです。

ANSWER / 解答 練習問題 6 の解答・解説

(1) 和が 11、積が 30 になる 2 数は 5 と 6 です。

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6)$$

したがって、 $A = 5, B = 6$ または $A = 6, B = 5$ です。

(2) 和が -9、積が 14 になる 2 数は -2 と -7 です。

$$x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7)$$

したがって、 $A = 2, B = 7$ または $A = 7, B = 2$ です。

(3) 積が -20 で和が 1 になる 2 数は 5 と -4 です。

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$$

したがって、 $A = 5, B = 4$ です。

ANSWER / 解答 練習問題 7 の解答・解説

$x^2 - 2x - 35$ では、探す 2 数の和が -2、積が -35 です。

各選択肢を確認します。

- ・ア $5 + (-7) = -2$ 、 $5 \cdot (-7) = -35$ なので条件を両方満たします。
- ・イ $7 + (-5) = 2$ なので和が一致しません。
- ・ウ $1 + (-35) = -34$ なので和が一致しません。
- ・エ $35 + (-1) = 34$ なので和が一致しません。

したがって、正しい選択肢はアです。

よって、

$$x^2 - 2x - 35 = (x + 5)(x - 7)$$

となります。

ANSWER / 解答 練習問題 8 の解答・解説

$(x + 1)(x + 10)$ では、括弧内の 2 数の積は 10 ですが、和は 11 です。

実際に展開すると、

$$(x + 1)(x + 10) = x^2 + 11x + 10$$

となり、元の $x^2 + 7x + 10$ とは一致しません。

$x^2 + 7x + 10$ では、和が 7、積が 10 になる 2 数を探します。

2 と 5 なら、 $2 + 5 = 7$ 、 $2 \cdot 5 = 10$ です。

したがって、

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

となります。

因数分解では積だけで候補を決めず、和も同時に一致していることを確認します。