

GOAL この講でできるようになること

- ・ 因数分解が展開の逆向きの変形であることを説明できる。
- ・ $a^2 + 2ab + b^2$ の形を見て $(a + b)^2$ に因数分解できる。
- ・ $a^2 - 2ab + b^2$ の形を見て $(a - b)^2$ に因数分解できる。
- ・ $a^2 - b^2$ の形を見て $(a + b)(a - b)$ に因数分解できる。
- ・ 共通因数を取り出したあとに乗法公式を使えるか判断できる。

EXPLANATION / 解説 展開した道を逆にたどる
乗法公式では、積の形を和の形へ展開しました。
例えば、

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

です。
この等式は左右を入れ替えても成り立つので、

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

と見ることもできます。
つまり、 $a^2 + 2ab + b^2$ という形を見つければ、 $(a + b)^2$ という積の形へ戻せます。
因数分解では、新しい公式を覚えるというより、**知っている展開公式を逆向きに読むことが大切です。**

POINT 因数分解では答えの形を予想する
展開では、括弧から出発して多項式を作りました。
因数分解では逆に、多項式を見て「どんな括弧を展開したらこの式になるか」を考えます。
特に、次の3つの形を見分けます。

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

式を見たら、すぐ計算するのではなく、最初の項と最後の項が何の2乗かを確認します。

EXPLANATION / 解説 平方の形は両端から調べる
 $x^2 + 6x + 9$ を因数分解してみます。
最初の項は x^2 、最後の項は $9 = 3^2$ です。
そこで、 $(x + 3)^2$ の形を予想します。
実際に、

$$2 \cdot x \cdot 3 = 6x$$

となり、真ん中の項とも一致します。
したがって、

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

です。
平方の公式を使うときは、**両端が2乗になっているだけでは不十分です。**真ん中の項が両端のもとの式の積の2倍になっているかまで確認します。

CAUTION / 注意 両端だけ見て決めない
 $x^2 + 5x + 9$ では、 x^2 と 9 はどちらも平方になっています。
しかし、

$$2 \cdot x \cdot 3 = 6x$$

であり、真ん中の項 $5x$ とは一致しません。
したがって、 $x^2 + 5x + 9$ を $(x + 3)^2$ と因数分解することはできません。
平方の形かどうかは、**最初・真ん中・最後の3項をすべて確認する必要があります。**

EXPLANATION / 解説 真ん中が負なら差の平方を疑う
 $x^2 - 8x + 16$ を見ます。
最初の項は x^2 、最後の項は $16 = 4^2$ です。
さらに、

$$-2 \cdot x \cdot 4 = -8x$$

なので、

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

となります。
真ん中の項が負だからといって、最後の項まで負になるわけではありません。
 $(a - b)^2$ を展開したときの最後の項は b^2 なので正です。

EXPLANATION / 解説 2乗どうしの引き算は和と差の積になる

$x^2 - 25$ を考えます。

これは、

$$x^2 - 5^2$$

と見ることができます。

乗法公式

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

を逆向きに使うと、

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

です。

この形を平方差といいます。

2つの平方の差を見つけたら、和と差の積に因数分解できないか確認します。

CAUTION / 注意 平方の和には同じ公式を使えない

$x^2 + 25$ は $x^2 + 5^2$ ですが、

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

は引き算の形に対する公式です。

したがって、

$$x^2 + 25$$

にはこの公式を使えません。

$(x + 5)(x - 5)$ を展開すると $x^2 - 25$ になるため、符号が一致しないことも確認できます。

EXPLANATION / 解説 最初に共通因数を確認する

$2x^2 + 12x + 18$ を見て、すぐ平方の公式を探すと形が少し見えにくくなります。

3つの項すべてに2が共通しているので、先に取り出します。

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 18 &= 2(x^2 + 6x + 9) \\ &= 2(x + 3)^2 \end{aligned}$$

因数分解では、まず共通因数を確認し、そのあと括弧の中に乗法公式の形が残っていないか調べます。一度因数分解しただけで止まらず、**まだ積の形へ変えられる部分がないか**を見ることが大切です。

POINT 公式を使う因数分解の判断順序

式を見たら、次の順に確認します。

1. 全項に共通因数がないかを見る。
2. 最初と最後の項が平方になっているかを見る。
3. 3項なら、真ん中が積の2倍になっているかを見る。
4. 2項の差なら、平方差になっていないかを見る。
5. 因数分解したあと、展開して元の式へ戻るか確認する。

因数分解は形当てではなく、展開によって正しさを確かめられる変形です。

例題 1 EXERCISE

$x^2 + 10x + 25$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題1の解答・解説

最初の項は x^2 、最後の項は $25 = 5^2$ です。

真ん中の項を確認すると、

$$2 \cdot x \cdot 5 = 10x$$

なので、 $a^2 + 2ab + b^2$ の形です。

したがって、

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

です。

展開すると $x^2 + 10x + 25$ に戻るのを確認できます。

例題 2 EXERCISE

$4x^2 - 12x + 9$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題2の解答・解説

最初の項は $4x^2 = (2x)^2$ 、最後の項は $9 = 3^2$ です。
真ん中の項は、

$$-2 \cdot (2x) \cdot 3 = -12x$$

となります。

したがって、 $a^2 - 2ab + b^2$ の形なので、

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

です。

最初の平方根を x ではなく $2x$ と見るのがポイントです。

例題 3 EXERCISE

$9x^2 - 16$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題3の解答・解説

$9x^2 = (3x)^2$ 、 $16 = 4^2$ なので、2つの平方の差です。
したがって、

$$\begin{aligned} 9x^2 - 16 &= (3x)^2 - 4^2 \\ &= (3x + 4)(3x - 4) \end{aligned}$$

です。

平方差では、2つの平方のもとの式を使って和と差の括弧を作ります。

例題 4 EXERCISE

$3x^2 - 18x + 27$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題4の解答・解説

3つの項すべてに3が共通しています。
先に3を取り出します。

$$3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9)$$

括弧内では $9 = 3^2$ であり、

$$-2 \cdot x \cdot 3 = -6x$$

なので、

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

です。

したがって、

$$3x^2 - 18x + 27 = 3(x - 3)^2$$

となります。

共通因数を取り出したあとも、括弧内をもう一度確認します。

SECTION 1 演習問題

練習問題 1 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 + 8x + 16$
- (2) $x^2 + 14x + 49$
- (3) $x^2 - 10x + 25$

練習問題 2 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 - 12x + 36$
- (2) $4x^2 + 12x + 9$
- (3) $9x^2 - 24x + 16$

練習問題 3 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 - 36$
- (2) $4x^2 - 25$
- (3) $9a^2 - b^2$

練習問題 4 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $25x^2 - 4y^2$
- (2) $49a^2 - 9b^2$
- (3) $16x^2 - 81$

練習問題 5 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $2x^2 + 8x + 8$
- (2) $5x^2 - 30x + 45$
- (3) $3x^2 - 27$

練習問題 6 EXERCISE

次の式を、これ以上共通因数や乗法公式を使って因数分解できないところまで因数分解しなさい。

- (1) $8x^2 - 32$
- (2) $12x^2 + 24x + 12$
- (3) $18x^2 - 72x + 72$

練習問題 7 EXERCISE

次のうち、 $(x+4)^2$ と因数分解できる式を 1 つ選びなさい。

- ア $x^2 + 4x + 16$
- イ $x^2 + 8x + 16$
- ウ $x^2 + 8x + 8$
- エ $x^2 + 16$

練習問題 8 EXERCISE

ある生徒は、 $x^2 - 16$ を

$$x^2 - 16 = (x - 4)^2$$

と因数分解しました。

誤りを説明し、正しく因数分解しなさい。

SECTION 2 演習問題の解答・解説

ANSWER / 解答 練習問題 1 の解答・解説

(1) $16 = 4^2$ であり、 $2 \cdot x \cdot 4 = 8x$ なので、

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

です。

(2) $49 = 7^2$ であり、 $2 \cdot x \cdot 7 = 14x$ なので、

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$$

です。

(3) $25 = 5^2$ であり、 $-2 \cdot x \cdot 5 = -10x$ なので、

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

です。

3 項の平方では、両端だけでなく真ん中の項まで一致しているか確認します。

ANSWER / 解答 練習問題 2 の解答・解説

(1) $36 = 6^2$ であり、 $-2 \cdot x \cdot 6 = -12x$ なので、

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$$

です。

(2) $4x^2 = (2x)^2$ 、 $9 = 3^2$ です。また、

$$2 \cdot (2x) \cdot 3 = 12x$$

なので、

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$$

です。

(3) $9x^2 = (3x)^2$ 、 $16 = 4^2$ であり、

$$-2 \cdot (3x) \cdot 4 = -24x$$

なので、

$$9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

です。

係数が 1 でない場合は、最初の項が何の平方かを正しく読み取ります。

ANSWER / 解答 練習問題 3 の解答・解説

(1)

$$\begin{aligned} x^2 - 36 &= x^2 - 6^2 \\ &= (x + 6)(x - 6) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25 &= (2x)^2 - 5^2 \\ &= (2x + 5)(2x - 5) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} 9a^2 - b^2 &= (3a)^2 - b^2 \\ &= (3a + b)(3a - b) \end{aligned}$$

いずれも 2 つの平方の差なので、和と差の積へ変形できます。

ANSWER / 解答 練習問題 4 の解答・解説

(1)

$$\begin{aligned} 25x^2 - 4y^2 &= (5x)^2 - (2y)^2 \\ &= (5x + 2y)(5x - 2y) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 49a^2 - 9b^2 &= (7a)^2 - (3b)^2 \\ &= (7a + 3b)(7a - 3b) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} 16x^2 - 81 &= (4x)^2 - 9^2 \\ &= (4x + 9)(4x - 9) \end{aligned}$$

数だけでなく文字を含む式も、ひとまとまりとして平方と見れば同じ公式を使えます。

(1) 全項に 2 が共通しています。

$$\begin{aligned} 2x^2 + 8x + 8 &= 2(x^2 + 4x + 4) \\ &= 2(x + 2)^2 \end{aligned}$$

(2) 全項に 5 が共通しています。

$$\begin{aligned} 5x^2 - 30x + 45 &= 5(x^2 - 6x + 9) \\ &= 5(x - 3)^2 \end{aligned}$$

(3) 全項に 3 が共通しています。

$$\begin{aligned} 3x^2 - 27 &= 3(x^2 - 9) \\ &= 3(x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

共通因数を取り出して終わりではなく、括弧内に平方の公式や平方差が残っていないか確認します。

(1) まず 8 を取り出します。

$$\begin{aligned} 8x^2 - 32 &= 8(x^2 - 4) \\ &= 8(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

(2) 全項に 12 が共通しています。

$$\begin{aligned} 12x^2 + 24x + 12 &= 12(x^2 + 2x + 1) \\ &= 12(x + 1)^2 \end{aligned}$$

(3) 全項に 18 が共通しています。

$$\begin{aligned} 18x^2 - 72x + 72 &= 18(x^2 - 4x + 4) \\ &= 18(x - 2)^2 \end{aligned}$$

因数分解では、括弧内にまだ因数分解できる形が残っていないか最後まで確認します。

$(x + 4)^2$ を展開して確認します。

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 \\ &= x^2 + 8x + 16 \end{aligned}$$

したがって、正しい選択肢はイです。

- ・ アは真ん中の項が $4x$ で一致しません。
- ・ イは $x^2 + 8x + 16$ なので一致します。
- ・ ウは最後の項が 8 で一致しません。
- ・ エには真ん中の項 $8x$ がありません。

平方の形では 3 項すべてを確認します。

$(x - 4)^2$ を展開すると、

$$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

なので、 $x^2 - 16$ とは一致しません。

$x^2 - 16$ は、

$$x^2 - 4^2$$

という 2 つの平方の差です。

したがって、

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$$

と因数分解します。

平方の形 $(a - b)^2$ と平方差 $a^2 - b^2$ は別の形です。項の数と符号を見て区別します。