第 185 講 微分可能性と導関数

学習目標

この講では、次のことができるようになることを目標とする。
- 微分係数を差分商の極限として定義できる。
- 関数がある点で微分可能であるかを、左右の差分商の極限から判断できる。
- 微分係数と導関数の違いを説明できる。
- 微分可能なら連続である理由と、逆が成り立たない反例を説明できる。

1. 変化の割合を極限で考える

値の近づき方から変化の近づき方へ

関数の連続性では、xがaに近づくとき、関数の値$f(x)$が$f(a)$に近づくかを考えた。
微分では、さらに一歩進めて、xの変化に対する$f(x)$の変化の割合が 1 つの値へ近づくかを考える。
関数$f(x)$が点aを含むある開区間で定義された実数値関数であるとする。$h \neq 0$かつ$a+h$がその開区間内にあるとき、点$(a, f(a))$と点$(a+h, f(a+h))$を結ぶ直線を考える。
2 点を結ぶ割線の傾きは、次の差分商で与えられる。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

この値は、2 点を結ぶ割線の傾きを表している。
hを 0 へ近づけるとき、差分商が有限値へ近づく場合に限り、割線の傾きは接線の傾きへ近づくと考えられる。
例として、$f(x)=x^2$の$x=1$で考える。点$P(1,1)$と点$Q(2,4)$を結ぶ割線の傾きは3である。
一般に$Q=(1+h,(1+h)^2)$とすると、割線の傾きは次のように計算できる。

$$\frac{(1+h)^2-1}{h}=2+h$$

hを 0 へ近づけると、割線の傾きは有限値2へ近づく。

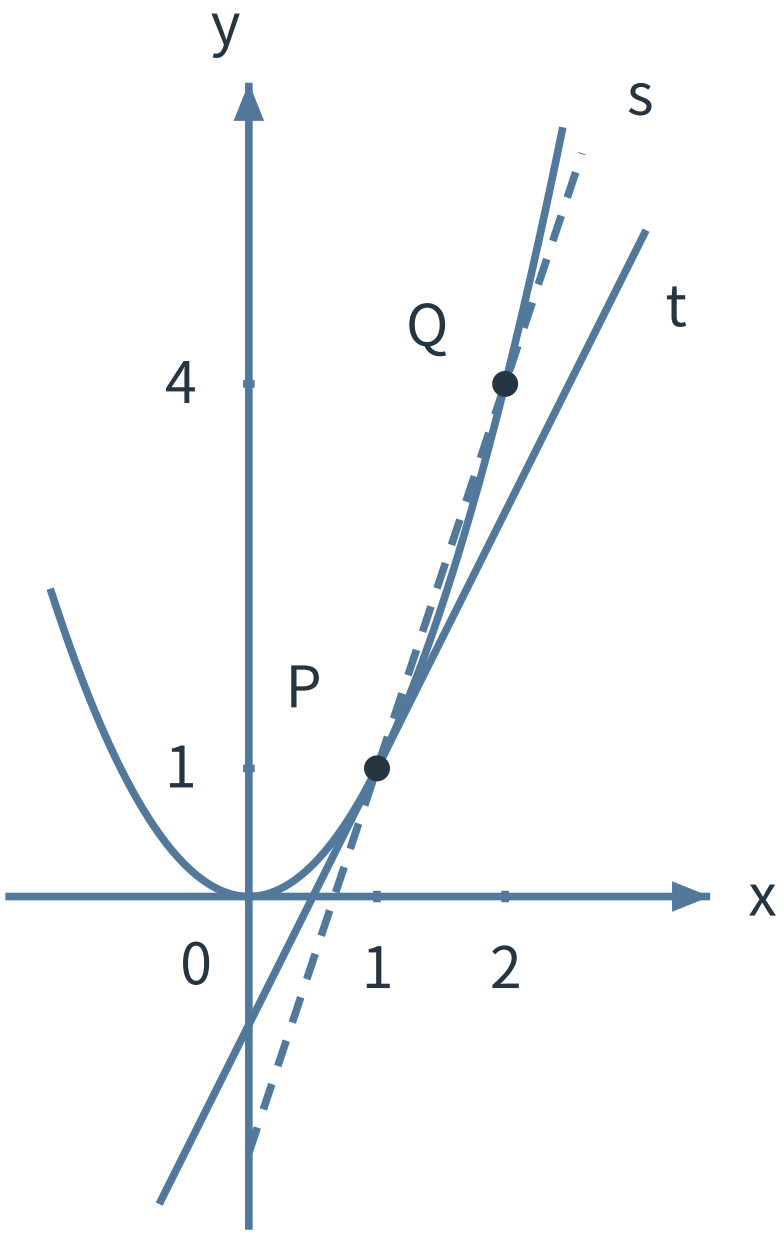

図 1　曲線は $y = x^2$、$P(1, 1)$ と $Q(2, 4)$ を通る破線 s は割線 $y = 3x - 2$ である。実線の直線 t は P における接線 $y = 2x - 1$ である。割線の傾きは 3、接線の傾きは 2 で異なる。各グラフの一部を表示している。

2. 微分係数の定義

微分係数

関数$f(x)$が点aを含むある開区間で定義された実数値関数であるとする。
$f(x)$の$x=a$における微分係数$f'(a)$は、次の差分商の有限な両側極限が存在するとき、その極限値として定める。

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

この有限な両側極限が存在するとき、$f(x)$は$x=a$で微分可能であるという。
ここでhは 0 ではない。差分商では分母にhがあるため、$h=0$を直接代入することはできない。
また、$x=a+h$とおくと$h=x-a$であるため、同じ定義をxを用いて次のように表すこともできる。

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

左右から近づけた差分商の極限が一致して初めて微分係数が定まる。左右の極限が異なる場合や、極限が無限大になる場合は微分係数は存在しない。

微分可能性を判断する視点

微分可能性を見るときは、次の順序で考える。
1. 点aの左右から近づけた差分商を考える。
2. 左右の差分商の極限が一致するかを確認する。
3. 一致した有限値を微分係数とする。

微分可能性は、値が近づく連続性よりも強い条件であり、変化の割合まで 1 つの値へ近づくことを要求する。

端点の微分と内点の微分

本講で扱う微分可能性は、点aの左右に近い値が存在する内点での微分である。
区間の端点では片側からしか近づけないため、片側微分という別の考え方を用いる場合がある。
本講の通常の内点での微分係数と混同しない。

3. 微分可能性と連続性

微分可能なら連続である

微分可能性は、変化の割合が有限値へ近づくことを要求するため、微分可能な関数は必ず連続である。
$h\neq 0$として、差分を次のように積の形へ変形できる。

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h$$

微分可能なら差分商は有限値へ近づき、$h\to 0$で差分商とhの積が0へ近づくため、$f(a+h)-f(a)\to 0$になる。したがって、$f(a+h)\to f(a)$となり、$f(x)$は$x=a$で連続である。
ただし、逆は成り立たない。連続であっても、変化の割合が 1 つに定まらない場合がある。

絶対値関数による反例

$f(x)=|\,x\,|$は$x=0$で連続である。
$x\to 0$のとき$|\,x\,|\to 0$であり、$f(0)=0$なので、連続性が確認できる。
$h>0$のとき、差分商は$\frac{|\,h\,|-0}{h}=1$となり、右側から近づけた差分商の極限は1である。
$h<0$のとき、差分商は$\frac{|\,h\,|-0}{h}=-1$となり、左側から近づけた差分商の極限は-1である。
左右の極限が一致しないため、$\lim_{h\to 0}\frac{|\,h\,|-0}{h}$は存在せず、有限な両側極限は存在しない。

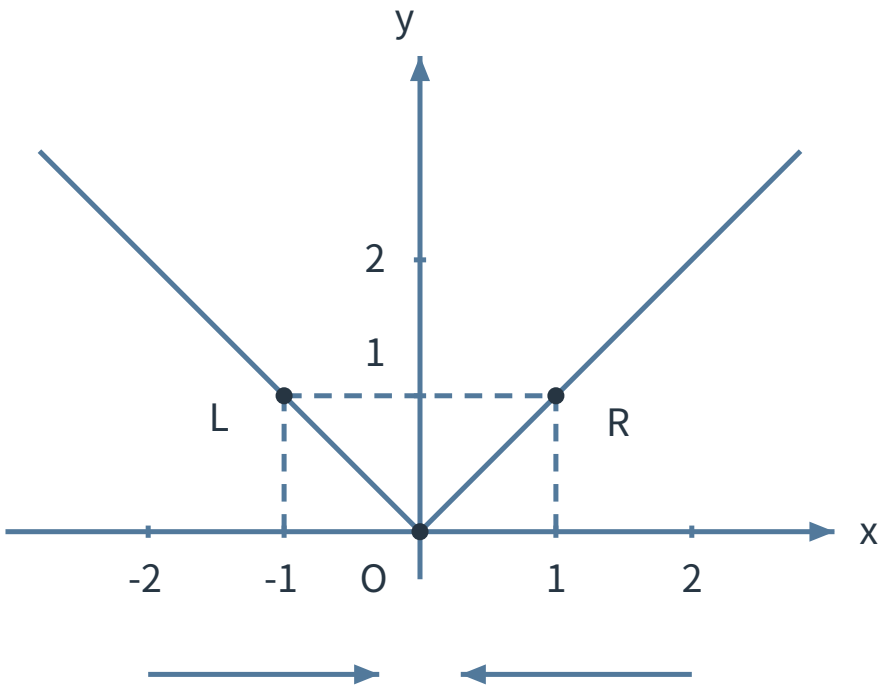

図 2　$y=|\,x\,|$の原点をはさんだ左右の枝である。$L(-1,1)$、$O(0,0)$、$R(1,1)$ を通り、原点へ近づくと関数値は左右とも 0 へ近づく。一方、左側の差商は -1、右側の差商は 1 で一致しない。原点で連続であっても微分可能ではない。下の矢印は x を 0 へ近づける向きである。

4. 導関数

導関数

関数$f(x)$が微分可能である各点xに対して、微分係数$f'(x)$を対応させる関数を導関数という。
一点$x=a$での微分係数$f'(a)$は 1 つの値であり、導関数$f'(x)$は各点の微分係数を対応させた関数である。
$f(x)=x^2$について、微分係数の定義から次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2x + h) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

したがって、$f(x) = x^2$の導関数は$f'(x) = 2x$であり、$x = 3$における微分係数は$f'(3) = 6$である。
導関数の定義域は、もとの関数の定義域のうち微分可能な点全体である。
また、$y = f(x)$のとき、導関数はy'や$\frac{dy}{dx}$と書くことができる。これらはxの変化に対するyの変化の割合を表す記号である。

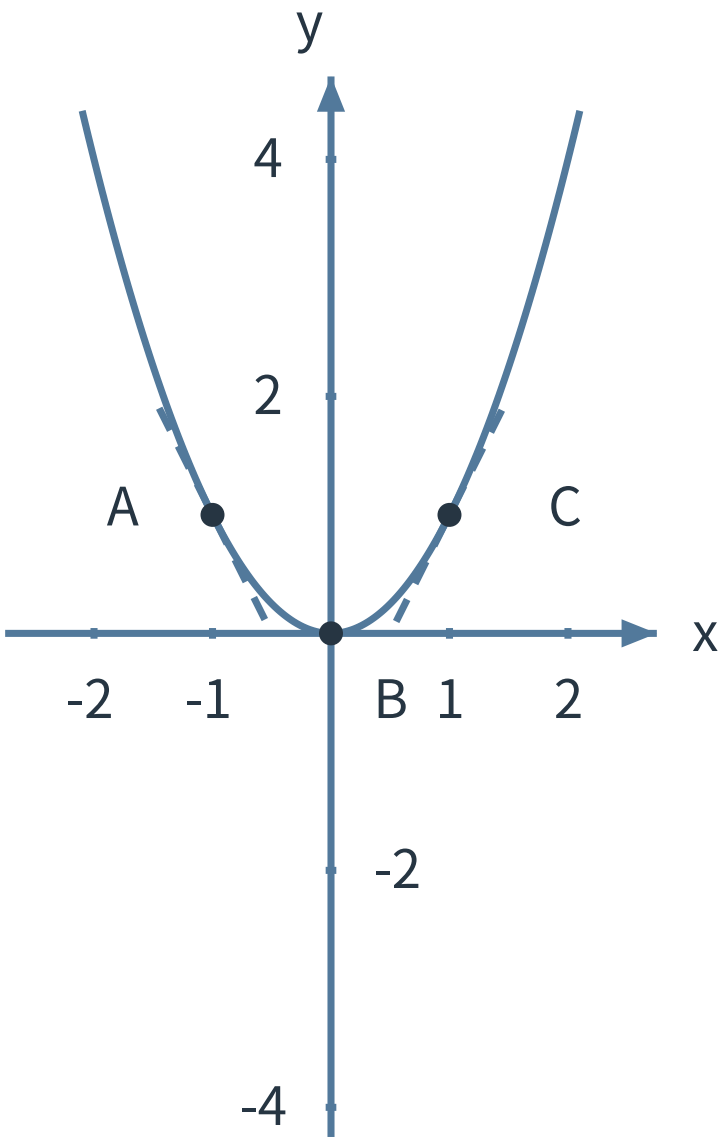

図 3　元の関数 $f(x) = x^2$ のグラフである。$A(-1, 1)$ と $C(1, 1)$ での短い破線は接線の一部で、傾きは順に -2 と 2 である。$B(0, 0)$ での接線は横軸と重なり、傾きは 0 である。次の導関数の図とは、座標軸の範囲と目盛をそろえている。

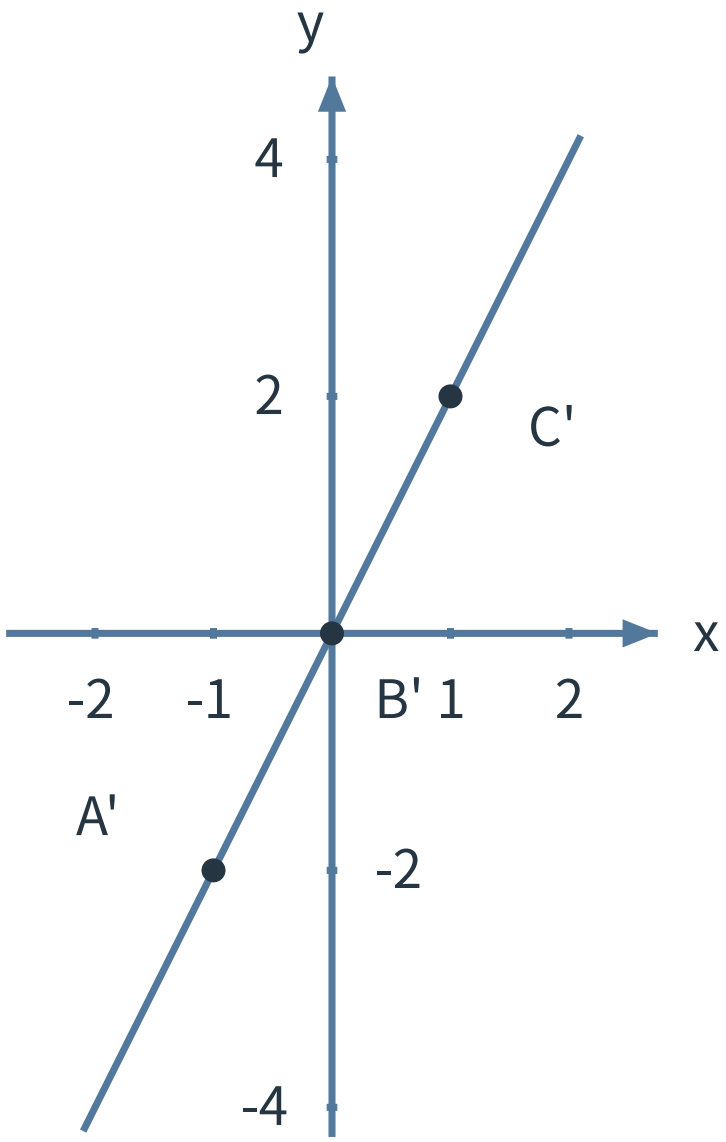

図 4　導関数 $f'(x) = 2x$ のグラフである。$A'(-1, -2)$、$B'(0, 0)$、$C'(1, 2)$ の縦座標は、前の図の同じ x における接線の傾きを表す。元の関数の高さ $f(x)$ と、傾きを表す $f'(x)$ は異なる量である。両図ともグラフ全体の一部を表示している。

例題 1

$f(x) = x^2 - 3x + 2$について、$x = 2$における微分係数を定義から求めなさい。

例題 1 の解答・解説

定義を用いるため、$x=2$における微分係数は次の極限で表される。

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$f(2)$は次のように計算できる。

$$f(2)=2^2-3\cdot 2+2=0$$

また、$f(2+h)$は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}f(2+h)&=(2+h)^2-3(2+h)+2\\&=4+4h+h^2-6-3h+2\\&=h+h^2\end{aligned}$$

差分商を次のように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\frac{h+h^2}{h}\\&=1+h\end{aligned}$$

したがって、hを 0 へ近づけると微分係数は次の値になる。

$$f'(2)=1$$

よって、$x=2$における微分係数は1であり、点$(2,0)$における接線の傾きが1であることを意味する。

例題 2

関数$g(x)$を、$x<1$では$g(x)=x^2$、$x\geq 1$では$g(x)=ax+b$として定義する。ただし、a,bは実定数である。
$g(x)$が$x=1$で微分可能となるようなa,bを求めなさい。

例題 2 の解答・解説

微分可能であるためには、まず連続である必要がある。
左側から近づけた極限は$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 1$であり、右側から近づけた極限は$\lim_{x\to 1^+} g(x) = a + b$である。また、点での値は$g(1) = a + b$である。したがって、連続条件$a + b = 1$のもとでは$g(1) = 1$となる。
したがって、$x = 1$で連続であるためには$a + b = 1$である必要がある。
次に左右の差分商を比較する。
$h < 0$のとき、差分商は次のように変形できる。

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$$

左側の差分商の極限は2である。
$h > 0$のとき、差分商は次のように変形できる。

$$\frac{a(1+h) + b - (a+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

右側の差分商の極限はaである。
微分可能であるためには左右の差分商の極限が一致する必要があるので、$a = 2$である。
さらに連続条件$a + b = 1$へ代入すると、$b = -1$である。
以上より、$a = 2$、$b = -1$である。
逆に$a = 2$、$b = -1$とすると、連続条件を満たし、左右の差分商の極限はともに2になるため十分性も確認できる。

例題 3

$f(x) = x^3 - 2x$について、導関数を定義から求め、$f'(-1)$の値とその意味を説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

定義より、導関数は次の極限で表される。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x) = x^3 - 2x$について、$f(x+h)$は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^3 - 2(x+h) \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h \end{aligned}$$

したがって、差分商は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2 - 2 \end{aligned}$$

hを 0 へ近づけると、導関数は$f'(x) = 3x^2 - 2$となる。
したがって、$f'(-1)$は次の値になる。

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 = 1$$

よって、$f'(-1) = 1$は$x = -1$における微分係数を表し、点$(-1, 1)$における接線の傾きが1であるという意味を持つ。

演習問題

練習問題 1

関数$f(x) = 5$を実数全体で定義する。この関数の導関数を、定義を用いて求めなさい。

練習問題 2

関数$f(x) = 2x^2 + x$を実数全体で定義する。この関数の$x = -1$における微分係数を、定義を用いて求めなさい。

練習問題 3

関数$f(x)$は$x = 2$を含むある開区間で定義された実数値関数である。
次の極限が3であるとする。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3$$

次の極限の値を求めよ。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+2h) - f(2)}{h}$$

練習問題 4

関数$f(x) = |\,x-2\,|$について、$x=2$で連続であるが微分できないことを、連続性と左右の差分商を用いて説明しなさい。

練習問題 5

関数$g(x)$を実数全体で定義し、$x<0$では$g(x)=x^2$、$x\geq 0$では$g(x)=kx$として定める。ただし、kは実定数である。
$g(x)$が$x=0$で微分可能となるようなkの値を求めなさい。

練習問題 6

関数$p(x)=x\,|\,x\,|$を実数全体で定義する。
$x=0$において$p(x)$が微分可能であるかを、微分の定義を用いて判定しなさい。ただし、積の微分公式は用いない。

練習問題 7

関数$f(x)=x^2+1$を実数全体で定義する。
導関数$f'(x)$、微分係数$f'(-2)$、関数の値$f(-2)$をそれぞれ求め、それぞれが何を表すか説明しなさい。

練習問題 8

関数$r(x)$を実数全体で定義し、$x\neq 0$では$r(x)=x^2$、$x=0$では$r(0)=1$として定める。$x=0$における微分可能性を、連続性と差分商を用いて説明しなさい。また、$x\neq 0$での式を微分して得られる$r'(x)=2x$をそのまま$x=0$へ適用し、$r'(0)=0$としてよいかを説明しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

定義から導関数を求める。
$h\neq 0$として、差分商は次のように計算できる。

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5-5}{h}=0$$

したがって、導関数は次の極限で表される。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} 0=0$$

よって、定数関数$f(x)=5$の導関数は$f'(x)=0$である。

練習問題 2 の解答・解説

定義より、$x=-1$における微分係数は次の極限で表される。

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$f(-1)$は次のように計算できる。

$$f(-1)=2(-1)^2+(-1)=1$$

また、$f(-1+h)$は次のように展開できる。

$$f(-1+h)=2(-1+h)^2+(-1+h)$$

展開すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned}f(-1+h)&=2\left(1-2h+h^2\right)-1+h\\&=1-3h+2h^2\end{aligned}$$

差分商は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}&=\frac{1-3h+2h^2-1}{h}\\&=-3+2h\end{aligned}$$

したがって、微分係数は次の極限から求められる。

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}(-3+2h)=-3$$

よって、$x=-1$における微分係数は-3である。

練習問題 3 の解答・解説

与えられた極限は、$x=2$における微分係数を表している。
求める式では分母がhであるため、分子の変化量に合わせて変数を置き換える。
$u=2h$とおくと、$h\neq 0$より$u\neq 0$であり、hが両側から 0 へ近づくとき、uも両側から 0 へ近づく。
この置き換えにより、式は次のように変形できる。

$$\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}=2\frac{f(2+u)-f(2)}{u}$$

したがって、求める極限は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}&=2\lim_{u\to 0}\frac{f(2+u)-f(2)}{u}\\&=2\cdot 3\end{aligned}$$

よって、求める極限の値は6である。

練習問題 4 の解答・解説

まず、連続性を確認する。
$x \to 2$のとき$|\ x-2\ | \to 0$であり、$f(2)=0$であるため、$f(x)=|\ x-2\ |$は$x=2$で連続である。
次に、微分可能性を差分商から調べる。$h \neq 0$として、差分商は次の式で表される。

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{|\ h\ |}{h}$$

$h>0$のとき、差分商は次のように計算できる。

$$\frac{|\ h\ |}{h}=1$$

したがって、右側から近づけた差分商の極限は1である。
$h<0$のとき、差分商は次のように計算できる。

$$\frac{|\ h\ |}{h}=-1$$

したがって、左側から近づけた差分商の極限は−1である。
左右の極限が一致しないため、有限な両側極限は存在しない。
よって、$f(x)=|\ x-2\ |$は$x=2$で連続であるが、微分可能ではない。

練習問題 5 の解答・解説

微分可能であるためには連続である必要があるため、まず$x=0$での連続性を確認する。
kがどのような実数であっても、左側から近づけた極限、右側から近づけた極限、関数値はすべて 0 になる。

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=0,\quad \lim_{x\to 0^+} g(x)=0,\quad g(0)=0$$

したがって、$g(x)$は$x=0$で連続である。
次に差分商を調べる。$h \neq 0$として、差分商は次の形である。

$$\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$h<0$のとき、$g(h)=h^2$なので、差分商は次のように計算できる。

$$\frac{g(h)-g(0)}{h}=\frac{h^2}{h}=h$$

このとき、左側から近づけた差分商の極限は0である。
$h>0$のとき、$g(h)=kh$なので、差分商は次のように計算できる。

$$\frac{g(h)-g(0)}{h}=\frac{kh}{h}=k$$

このとき、右側から近づけた差分商の極限はkである。
微分可能であるためには左右の差分商の極限が一致する必要があるため、$k=0$が必要である。
逆に、$k=0$とすると左右の差分商の極限はともに 0 となり、微分係数が存在する。
よって、$g(x)$が$x=0$で微分可能となる条件は$k=0$である。

練習問題 6 の解答・解説

$p(0)$は次の値になる。

$$p(0) = 0 \mid 0 \mid = 0$$

微分の定義から、$x = 0$における差分商を調べる。$h \neq 0$として、差分商は次の形である。

$$\frac{p(0+h) - p(0)}{h}$$

$p(h) = h \mid h \mid$であるため、差分商は次のように計算できる。

$$\frac{h \mid h \mid - 0}{h} = \mid h \mid$$

したがって、微分係数は次の極限で求められる。

$$p'(0) = \lim_{h \to 0} \mid h \mid = 0$$

よって、$p(x) = x \mid x \mid$は$x = 0$で微分可能であり、$p'(0) = 0$である。ここでは積の微分公式を使わず、定義によって微分可能性を判定している。

練習問題 7 の解答・解説

定義から導関数を求める。
$h \neq 0$として、差分商は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 + 1 - \left(x^2 + 1\right)}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h \end{aligned}$$

したがって、導関数は次の極限から求められる。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

よって、$f(x) = x^2 + 1$の導関数は$f'(x) = 2x$であり、各点における微分係数を対応させる関数である。
$x = -2$における微分係数は$f'(-2) = 2(-2) = -4$であり、点$(-2, 5)$における接線の傾きを表す。
また、関数の値は$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$であり、グラフ上の点の高さを表す。

練習問題 8 の解答・解説

まず、$x=0$での連続性を確認する。
$x\neq 0$では$r(x)=x^2$であるため、両側から近づけた関数の極限は次のようになる。

$$\lim_{x\to 0} r(x)=0$$

一方、関数値は$r(0)=1$であるため、両側からの極限と関数値が一致せず、$x=0$で不連続である。
次に差分商を調べる。$h\neq 0$として、差分商は次の形である。

$$\frac{r(0+h)-r(0)}{h}=\frac{h^2-1}{h}=h-\frac{1}{h}$$

$h\to 0^+$のとき、$h-\frac{1}{h}$は$-\infty$へ発散するため、右側の差分商は負の無限大へ向かう。
$h\to 0^-$のとき、$h-\frac{1}{h}$は$+\infty$へ発散するため、左側の差分商は正の無限大へ向かう。
左右の差分商は有限な値へ近づかず、有限な両側極限が存在しないため、$r(x)$は$x=0$で微分可能ではない。
微分可能性は、その点の値と近傍での関数の定義によって決まる。$x\neq 0$では$r(x)=x^2$であるため、その範囲では$r'(x)=2x$と求めることは正しい。しかし、$x=0$では$r(0)=1$と定義されており、近傍での式だけを見て$r'(0)=0$とすることはできない。
実際、$\lim_{x\to 0} r(x)=0$である一方、$r(0)=1$であるため、$x=0$で連続ではない。微分可能な関数は必ず連続であるため、$x=0$では微分不可能である。
したがって、$x\neq 0$で求めた導関数の式を、その点の定義を確認せずに$x=0$へ延長することは誤りである。